1. (FVII/4) Egy kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $h(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, ha $0 < x < 1$ és $0 < y < x^2$.
a) $P(X + Y < 1) =?$
b) Határozzuk meg a peremeloszlásokat! Független-e a két koordináta?

2. (FVII/6) Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $h(x, y) = 24xy$, ha $0 \le x$, $0 \le y$ és $x + y \le 1$.
a) Független-e egymástól X és Y?
b) Határozzuk meg a kétdimenziós eloszlásfüggvényt!

3. (FVII/19) Egy dobozban hat darab cédula van 1-től 6-ig megszámozva. Csukott szemmel egyszerre kiveszünk hármat. A kivett három cédulán levő számok növekvő sorrendben X, Y és Z. Adjuk meg
a) Y eloszlását!
b) X és Z együttes eloszlását!

4. (FVII/23) A $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ egységnégyzetben adott egy $h(x, y) = 2(x^3 + y^3)$ sűrűségfüggvényű eloszlás. $0 \le x \le 1$-ben, illetve $0 \le y \le 1$-ben választunk egy-egy X, ill. Y számot a $h(x, y)$ peremeloszlásai szerint, de egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége, hogy $X^2 < Y$?

5. (FVII/56) Egy dobozban 30 db 40 W-os, 30 db 60 W-os és 40 db 100 W-os villanykörte van. Kiveszünk véletlenszerűen, visszatevés nélkül 20 villanykörtét. Jelentse X a mintában szereplő 40 W-os égők számát, Y pedig a 60 W-os égőkét.
a) Írjuk fel az (X, Y) valószínűségi változó eloszlását!
b) Számítsuk ki X és Y peremeloszlását!

6. (FXIV/18)
a) Körülbelül hányszor kell a rulettet megforgatni, hogy a pirosnak a forgatások alatt mért relatív gyakorisága kb. $0,9$ valószínűséggel közelítse az elméleti valószínűséget, $0,01$ pontossággal?
b) Az a gyanúnk, hogy a rulettkorong nem szabályos. 100 db egymást követő forgatás eredményének ismeretében milyen pontossággal tudunk következtetni a relatív gyakoriság valószínűségére $0,9$ biztonsággal?

7. (FXIV/22) Egy szállítmányból vett 250 elemű mintában 27 selejtet találtak. Adjunk alsó és felső korlátot $0,95$ biztonsági szinten az egész szállítmányban várható selejtarányra!

Eredmények

1. a) $$\iint\limits_{x+y<1} h(x, y)\, dxdy = \int_0^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \int_{\sqrt{y}}^{1-y} \frac{1}{\sqrt{y}}\, dxdy = \frac{-7 + 5\sqrt{5}}{6}.$$

b) $f_X(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{y}}\, dy = 2x \ (0 < x < 1)$,

$f_Y(y) = \int_{\sqrt{y}}^{1} \frac{1}{\sqrt{y}}\, dx = \frac{1}{sqrty} - 1 \ (0 < y < 1)$.

Nem függetlenek az X és Y, mert $2x \cdot (\frac{1}{\sqrt{y}} - 1) \neq \frac{1}{\sqrt{y}}$.

2.a) Nem függetlenek, mert a peremsűsrűségfüggvények $(0,1)$-en nem nullák, de az együttes sűrűségfüggvény az egységnégyzetnek csak az alsó felén nem 0, tehát az együttes sűrűségfüggvény nem lehet a peremsűrűségfüggvények szorzata.

b) Az együttes eloszlásfüggvény:
$H(u,v) = 0$, ha $u \le 0$ vagy $v \le 0$;
$H(u,v) = \int\limits_0^u \int\limits_0^v 24xy\,dydx = 6u^2v^2$, ha $0 \le u$, $0 \le v \le 1-u$;
$H(u,v) = 1 - \int\limits_u^1 \int\limits_0^{1-x} 24xy\,dydx - \int\limits_v^1 \int\limits_0^{1-y} 24xy\,dxdy = 3u^4 - 8u^3 + 6u^2 + 3v^4 - 8v^3 + 6v^2 - 1$,
ha $0 \le u \le 1$ és $1 - u \le v \le 1$.
$H(u,v) = 3u^4 - 8u^4 + 6u^2$, ha $0 \le u \le 1$, $v > 1$ (az előző határesete $v = 1$-gyel);
$H(u,v) = 3v^4 - 8v^3 + 6v^2$, ha $0 \le v \le 1$, $u > 1$;
$H(u,v) = 1$, ha $u > 1$, $v > 1$.

3. a) $P(Y = k) = \frac{(k-1)(6-k)}{20}$, ha $k = 2, \ldots, 6$.
b) $P(X = a, Z = a + k) = \frac{k-1}{20}$, ahol $1 \le a \le 4$ és $2 \le k \le 6$.

4. A peremsűrűségfüggvények
$f_X(x) = \int\limits_0^1 2(x^3 + y^3)\,dy = \frac{1}{2} + 2x^3$, ha $0 < x < 1$ és
$f_Y(y) = \frac{1}{2} + 2y^3$, ha $0 < y < 1$. Az új együttes sűrűségfüggvény
$f(x,y) = (\frac{1}{2} + 2x^3)(\frac{1}{2} + 2y^3)$, és a keresett valószínűség
$\int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^1 (\frac{1}{2} + 2x^3)(\frac{1}{2} + 2y^3)\,dydx = \frac{23}{36}$

5. a) $P(X = k, Y = \ell) = \dfrac{\binom{30}{k} \cdot \binom{30}{\ell} \cdot \binom{40}{20-k-\ell}}{\binom{100}{20}}$, ahol $0 \le k, \ell$, $k + \ell \le 20$.

b) $P(X = k) = \dfrac{\binom{30}{k} \cdot \binom{70}{20-k}}{\binom{100}{20}}$, ahol $0 \le k \le 20$

$P(Y = \ell) = \dfrac{\binom{30}{\ell} \cdot \binom{70}{20-\ell}}{\binom{100}{20}}$, ahol $0 \le \ell \le 20$

6. a) $p = \frac{18}{37}$, $\sigma = \sqrt{\frac{18}{17} \cdot \frac{19}{17}}$. A $2\Phi\Big(\dfrac{0,01 \cdot \sqrt{n}}{\sigma}\Big) - 1 \ge 0,9$ feltétel $n \ge 6762$ esetén teljesül.

b) $n = 100$ esetén a $2\Phi\Big(\dfrac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma}\Big) - 1 \ge 0,9$ feltétel $\varepsilon \ge 0,1645 \cdot \sigma$ esetén teljesül, és $\sigma = \sqrt{p(1-p)} \le \frac{1}{2}$, tehát $\varepsilon \ge 0,1645 \cdot \frac{1}{2}$ esetén a p értékétől függetlenül is teljesül a feltétel. Így $\varepsilon = 0,082$ pontossággal meg tudjuk mondani a valószínűséget 90%-os biztonsággal.

7. $\frac{q_n}{n} = \frac{27}{250} = 0,108$ a relatív gyakoriság, p az ismeretlen valószínűség (selejtarány), $\sigma = \sqrt{p(1-p)} \le \frac{1}{2}$, és a feltétel $\Phi(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}) \ge 0,975$. Ez $\varepsilon = 0,062$ esetén biztosan igaz, így $|0,108 - p| < 0,062$, azaz $0,046 < p < 0,17$ teljesül $0,95$ biztonsági szinten.