1. (FVIII/14) Határozzuk meg az ötös lottón a legkisebb számnak a legnagyobbra vonatkozó feltételes eloszlását, ha a legnagyobb szám a 60.

2. (FVIII/18) Annak a valószínűsége, hogy egy év alatt nem zuhan le repülőgép sehol a világon, $\frac{1}{100}$. Ha egy gép lezuhan, $\frac{3}{4}$ valószínűséggel meg tudják találni a fekete dobozt.
a) Határozzuk meg a megtalált fekete dobozok számának eloszlását!
b) Feltéve, hogy tavaly 20 fekete dobozt sikerült megtalálni, mi a valószínűsége annak, hogy 40 gép zuhant le?
c) Függetlenek-e a megtalált, illetve elveszett fekete dobozok számai mint valószínűségi változók?

3. (FVIII/21) Véletlenszerűen teszünk két jelet a számegyenesen a 0 és 1 pontok közé. Az elsőt olyan eloszlás szerint tűzzük ki, amelynek sűrűségfüggvénye arányos az intervallum jobb végpontjától vett távolsággal. A második jelet az első jel kitűzése után a 0 és az első jel közé tesszük olyan eloszlás szerint, amelynek sűrűségfüggvénye minden pontban arányos a pontnak az origótól való távolságával.
a) Aki csak a második jelet figyeli meg, milyen eloszlást tekintsen a megfigyelése modelljének?
b) Mi a valószínűsége, hogy mindkét jel az intervallum második felére kerül?

4. (FVIII/43) Legyen $k(y|x) = 2y/x^2$, ha $y \in [0, x]$, $f(x) = 2x$, ha $x \in [0, 1]$.
a) $P\{(x, y) : y > \frac{x}{2}\} = ?$
b) Határozzuk meg a másik peremsűrűségfüggvényt!

5. (FXI/16) Valaki villamossal és autóbusszal jut el a munkahelyére. A várakozási idő a villamosra 0 és 5 perc között, az autóbuszra 0 és 15 perc között egyenletes eloszlású. Határozzuk meg az összes várakozási idő eloszlását!

6. (FXI/33) Határozzuk meg a következő két diszkrét eloszlás konvolúcióját: $P(X = 1) = \frac{1}{4}$, $P(X = 2) = \frac{3}{4}$ és $P(Y = 1) = \frac{2}{5}$, $P(Y = 2) = \frac{1}{5}$, $P(Y = 3) = \frac{2}{5}$

7. (FXI/60) A P pont egyenletes eloszlású az 1 sugarú negyedkörlapon. Határozzuk meg a P pont körívtől mért d távolságának sűrűség- és eloszlásfüggvényét, valamint a mediánját!

8. (FVI/16) Egy szakadék mélységét próbáljuk megbecsülni egy kavics ledobásával. A kavics zuhanási idejére mért idő normális eloszlásúnak tekinthető $6s$ átlaggal, $0,1s$ szórással. Határozzuk meg a mért időből számított szakadékmélység eloszlását és várható értékét.

9. (FIX/8) Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye $h(x, y) = \frac{6}{5}(x + y^2)$, ha $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$.
a) Számítsuk ki az X és Y korrelációs hányadosát!
(A korrelációs hányados képlete $R(X, Y) = (M(XY) - M(X)M(Y))/D(X)D(Y)$.)
b) Mennyi $D^2(X + Y)$?

Megoldások

1. Legyen X a legkisebb, Y a legnagyobb kihúzott szám. Meghatározandó a $P(X = k \,|\, Y = 60)$ feltételes valószínűség. $P(Y = 60) = \frac{\binom{59}{4}}{\binom{90}{5}}$ és $P(X = k, Y = 60) = \frac{\binom{59-k}{3}}{\binom{90}{5}}$, így $P(X = k \,|\, Y = 60) = \frac{\binom{59-k}{3}}{\binom{59}{4}}$.

2. A lezuhanó gépek száma legyen X, ez Poisson-eloszlású, $P(X=0)=e^{-\lambda}=\frac{1}{100} \Rightarrow \lambda=\ln 100$. Annak a valószínűsége, hogy egy lezuhant gép fekete dobozát megtalálják, $p=\frac{3}{4}$. Ha Y a megtalált fekete dobozok száma, akkor Y az $X=n$ feltétel mellett (p,n) paraméterű binomiális: $P(Y=k\,|\,X=n)=\binom{n}{k}\cdot p^k(1-p)^{n-k}$, ha $k\le n$, és 0 egyébként. Ebből a teljes valószínűség tétele szerint

$$P(Y=k)=\sum_{n=0}^{\infty}P(Y=k\,|\,X=n)\cdot P(X=n)=\sum_{n=k}^{\infty}P(Y=k\,|\,X=n)\cdot P(X=n)=$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\cdot p^k(1-p)^{n-k}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}\cdot\frac{(\ln 100)^n}{n!}\cdot\frac{1}{100}.$$

De egyszerűsíthetjük is az eredményt:

$$\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\cdot p^k(1-p)^{n-k}\cdot\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^k(1-p)^{n-k}\cdot\frac{1}{n!}\lambda^{n-k}\lambda^k e^{-\lambda}=$$

$$\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda}\cdot\sum_{n=k}^{\infty}\frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda}e^{(1-p)\lambda}=\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-p\lambda},$$ tehát Y is Poisson-eloszlású, $p\lambda=\frac{3}{4}\ln 100$ paraméterrel.

A folytonos (X,Y) valószínűségi vektorváltozóra jelölje $h(x,y)$ az együttes sűrűségfüggvényt, $f(x)$, illetve $g(y)$ a peremsűrűségfüggvényeket, és $k(y|x)$ az Y-nak X-re vonatkozó feltételes sűrűségfüggvényét, továbbá $\ell(x|y)$ az X-nek Y-ra vonatkozó feltételes sűrűségfüggvényét. Ekkor tudjuk, hogy $k(y|x)=h(x,y)/f(x)$ és $\ell(x|y)=h(x,y)/g(y)$.

3. a) X az elsőként választott pont helye, Y a másodiké. A feltételek szerint $f(x)=c\cdot(1-x)$ $(x\in(0,1))$ valamely c konstanssal. A sűrűségfüggvény tulajdonságaiból $1=\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\int\limits_0^1 c(1-x)\,dx=\frac{1}{2}c$, így $c=2$ és $f(x)=2(1-x)$ $(0<x<1)$. Hasonlóan $k(y|x)=c\cdot y$ $(y\in(0,x))$, ahol $1=\int\limits_0^x cy=\frac{1}{2}cx^2$ miatt $c=\frac{2}{x^2}$. Tehát $k(y|x)=\frac{2y}{x^2}$ $(0<y<x)$. Az $k(y|x)=h(x,y)/f(x)$ összefüggés miatt $h(x,y)=\dfrac{4y(1-x)}{x^2}$, ha $0<x<1$ és $0<y<x$. Ebből kiszámítható

$$g(y)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x,y)\,dx=\int\limits_y^1\frac{4y(1-x)}{x^2}\,dx=-4y+4+4y\ln y,$$ amikor $y\in(0,1)$, és 0 különben.

b) $$P\left(X>\frac{1}{2},\,Y>\frac{1}{2}\right)=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{x}4(1-x)\frac{y}{x^2}\,dy\,dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}2\frac{1-x}{x^2}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)dx=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}.$$

4. $k(y|x)=\dfrac{2y}{x^2}$, ha $y\in[0,x]$, és $f(x)=2x$, ha $x\in[0,1]$. Ekkor $h(x,y)=\dfrac{2y}{x^2}\cdot 2x=\dfrac{4y}{x}$ $(0\le x\le 1,\;\; 0\le y\le x)$.

a) $$P(Y>X/2)=\int\limits_0^1\int\limits_{x/2}^{x}\frac{4y}{x}\,dy\,dx=\int\limits_0^1\frac{3}{2}x\,dx=\frac{3}{4}.$$

b) $g(y) = \int\limits_y^1 \frac{4y}{x}\,dx = -4y\ln y$, ha $0 < y < 1$, és 0 egyébként.

5. Legyen $f(x) = \frac{1}{5}$ és $g(y) = \frac{1}{15}$ a villamosra való X várakozási idő, illetve a buszra való Y várakozási idő sűrűségfüggvénye. Ha $k(u)$ az összes várakozási idő (azaz $X+Y$) sűrűségfüggvénye, akkor $k(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(u-x)\,dx$, ahol $f(x)g(u-x) = \frac{1}{75}$, ha $x \in (0,5)$ és $u - x \in (0,15)$. Egy xu-koordinátarendszerben ábrázolva a feltételt, egy $(0,0)$, $(5,5)$, $(5,20)$ és $(0,15)$ csúcsú paralelogrammát kapunk. Ennek alapján

$0 \le u \le 5$-re $k(u) = \int\limits_0^u \frac{1}{75}\,dx = \frac{1}{75}u$,

$5 \le u \le 15$-re $k(u) = \int\limits_0^{15} \frac{1}{75}\,dx = \frac{1}{15}$, és

$15 \le u \le 20$-ra $k(u) = \int\limits_{u-15}^{5} \frac{1}{75}\,dx = \frac{1}{75}(20-u)$, máshol pedig 0.

6.

$X+Y$	2	3	4	5
	$\frac{2}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{6}{20}$

7. A d távolság csak 0 és 1 közötti értékeket vehet föl, és itt az eloszlásfüggvénye $F(u) = P(d < u) = (\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\cdot(1-u)^2)/\frac{\pi}{4} = 2u - u^2$. Ebből a sűrűségfüggvény $f(u) = F'(u) = 2 - 2u$ $(0 < u < 1)$. A medián az az u érték, ahol $F(u) = 2u - u^2 = \frac{1}{2}$, tehát $u = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

8. a) Ha X a leesésig eltelt idő másodpercekben, és $F(x)$ az X eloszlás-, $f(x)$ pedig a sűrűségfüggvénye, akkor a szakadék mélysége méterekben $\frac{g}{2}X^2$, és ennek az eloszlásfüggvénye $P(\frac{g}{2}X^2 < x) = P(X < \sqrt{\frac{2x}{g}}) = F(\sqrt{\frac{2x}{g}})$, és a sűrűségfüggvénye $f\left(\sqrt{\frac{2x}{g}}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{g}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{10}{\sqrt{2\pi}} e^{-50\left(\sqrt{\frac{2x}{g}}-6\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2gx}}$, ha $x > 0$.
$M(\frac{g}{2}X^2) = \frac{g}{2}M(X^2)$. De tudjuk, hogy $D^2(X) = M(X^2) - M^2(X)$, így $\frac{g}{2}M(X^2) = \frac{g}{2}(0,1^2 + 6^2) = \frac{g}{2}\cdot 36,01 \approx 176,6$ (m).

9. a) $M(X) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 x \cdot \frac{6}{5}(x+y^2)\,dx\,dy = \frac{3}{5}$

$M(Y) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 y \cdot \frac{6}{5}(x+y^2)\,dx\,dy = \frac{3}{5}$

$M(XY) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 xy \cdot \frac{6}{5}(x+y^2)\,dx\,dy = \frac{7}{20}$

$M(X^2) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 x^2 \cdot \frac{6}{5}(x+y^2)\,dx\,dy = \frac{13}{30}$

$M(Y^2) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 y^2 \cdot \frac{6}{5}(x+y^2)\,dx\,dy = \frac{11}{25}$

$D^2(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{11}{150}$
$D^2(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \frac{2}{25}$
$\mathrm{cov}(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = -\frac{1}{100}$

$R(X,Y) = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{11}} \approx 0,13$
b) $D^2(X+Y) = M((X+Y)^2) - M(X+Y)^2 = M(X^2+Y^2+2XY) - (M(X)+M(Y))^2 = M(X^2) - M^2(X) + M(Y^2) - M^2(Y) + 2(M(XY) - M(X)M(Y)) = D^2(X) + D^2(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{2}{15}$