

1. házi feladat (határidő: 2016-09-16)

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 10 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 8 pontot el kell érni! Más megoldását lemasolni nem szabad!

1. Mely halmazok jólrendezett halmazok az alábbiak közül? (a) páros számok, (b) pozitív páros számok, (c) nemnegatív racionális számok, (d) a $[0, 1]$ intervallumba eső számok, (e) egész számok négyzetei, (f) egész számok köbei.
2. Igazoljuk, vagy adjunk ellenpéldát! (a) két racionális szám összege racionális, (b) egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális, (c) két irracionális szám összege irracionális.
3. Mennyi az értéke a következő kifejezéseknek? (a) $\lceil \lfloor \frac{3}{4} \rfloor + \lfloor -\frac{3}{4} \rfloor \rceil$, (b) $\lceil \lceil \frac{3}{4} \rceil + \lceil -\frac{3}{4} \rceil \rceil$, (c) $\{\frac{7}{4}\} + \{-\frac{7}{4}\} + \{-1\}$, (d) $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ ($x \in \mathbb{R}$)
4. Hány olyan n -hosszú 0-1-sorozat van, amelyben nincs két 0 egymás mellett?
5. Bizonyítsuk teljes indukcióval a következő összefüggést!

$$\sum_{k=0}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

6. Határozzuk meg az első n Fibonacci-szám összegét!
7. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$. Mutassuk meg, hogy az x -nél nem nagyobb, d -vel osztható pozitív egészek száma $\lfloor \frac{x}{d} \rfloor$.
8. Adjuk meg 101100111000_2 és 43210_5 értékét 10-es számrendszerben (Horner-módszerrel), és 3333 bináris, oktális, hexadecimális, valamint 5-ös számrendszerbeli alakját (ismételt maradékos osztásokkal)!
9. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal $(324, 276)$ értékét, és keressünk olyan x és y számot, melyre $324x + 276y = (324, 276)$.

10. Oldjuk meg a $248x + 312y = 8000$ diofantoszi egyenletet! Hány 248€ és hány 312€ értékű árut vásároltunk, ha épp 8000€-t fizettünk?

*11. Igazoljuk teljes indukcióval:

(a) Egy síkbeli tartományt n darab egyenessel részekre osztunk. Mutassuk meg, hogy az így kapott „térkép” két színnel színezzhető úgy, hogy a közös oldallal rendelkező részek különböző színek legyenek.

(b) Egy országban úgy építenek autópályákat, hogy mindegyik autópálya egyenes, egyik kereszteződésben sem találkozik kettőnél több út, és minden kereszteződésben az egyik út a másik fölött halad. Mutassuk meg, hogy bármely ilyen úthálózatban elérhető az, hogy minden úton felváltva alul majd felül haladjunk át a kereszteződésen.

- *12. A Nim nevű játékot néhány kupac gyufaszállal játssza két játékos. Felváltva elvesznek néhány (legalább egy, de akár az összes) gyufaszál az egyik kupacból. Az nyer, akié az utolsó gyufaszál. Adott méretű kupacok mellett melyik játékosnak van nyerő stratégiája? [Útmutatás: írjuk fel a kupacok méretét binárisan, majd e számokat írjuk egymás alá helyiérték szerint. Igazoljuk, hogy a második játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha minden helyiértéken páros az 1-esek száma.]