2. Házi feladat (határidő: 2015-09-25)

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 10 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 8 pontot el kell érni! Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Mutassuk meg, hogy $n!+1$-nek minden prímosztója n-nél nagyobb ($n \in \mathbb{N}^+$)! Vezessük le ebből, hogy végtelen sok prímszám van!

2. Bizonyítsuk be, hogy a szomszédos Fibonacci-számok relatív prímek.

3. Bizonyítsuk be, hogy hat egymást követő természetes szám közül mindig kiválasztható egy, amelyik relatív prím az összes többihez.

4. Mutassuk meg, hogy *(a)* $4k+1$ alakú számok szorzata $4k+1$ alakú. *(b)* végtelen sok $4k+3$ alakú prímszám van (Útmutatás: tekintsük a $4p_1p_2\dots p_n-1$ számot, ahol a p_i prímek mindegyike $4k+3$ alakú.)

5. Határozzuk meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét! *(a)* $2^{23}3^{10}7^{13}$, $2^{15}7^{10}13^{5}$; *(b)* $2^{23}3^{10}7^{13}$, $2^{15}7^{10}13^{5}$, $3^{15}7^{20}11^{2}$.

6. Számítsuk ki $25^{101} \bmod 11$ értékét!

7. Bizonyítsuk be, hogy minden $a, b > 1$ egész számra
$$[a,b] \mid a+b \iff a=b.$$

8. Hány 0-ra végződik az 1234! szám?

9. Lássuk be, hogy $\binom{2^n}{k}$ páros, ha $1 \le k \le 2^n-1$.

10. A páros számok körében definiált oszthatóságra nézve mely számok írhatók fel lényegében egyértelműen felbonthatatlanok szorzataként?

*11. Bizonyítsuk be, hogy minden $a > 1$, $m, n \ge 1$ egész számra $(a^m-1, a^n-1) = a^{(m,n)}-1$.

*12. Bizonyítsuk be, hogy az
$$n!+1, n!+2, \dots, n!+n$$
számok mindegyikének van olyan prímosztója, amely nem osztója a többi számnak! [Ötlet: igazoljuk, hogy mindegyik fenti számnak van $n/2$-nél nagyobb prímosztója.]

*13. Bizonyítsuk be, hogy ha $m > 1$ nem kettőhatvány, akkor van olyan $1 \le k \le m-1$, amelyre $\binom{m}{k}$ páratlan!