3. Házi feladat (határidő: 2016-09-30)

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 10 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 8 pontot el kell érni! Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Oldjuk meg a következő lineáris kongruenciákat!
   (a) $4x \equiv 6 \pmod{14}$,
   (b) $4x \equiv 6 \pmod{16}$,
   (c) $4x \equiv 8 \pmod{16}$.
2. Számítsuk ki $3^{-1} \bmod 13$, $3^{-1} \bmod 26$ és $3^{-1} \bmod 52$ értékét!
3. Készítsük el a modulo 12 összeadás és szorzás művelettábláját! Készítsük el a 12-höz relatív prímek és a 8-hoz relatív prímek szorzástábláját!
4. Oldjuk meg az
$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 1 \pmod{4} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$
   kongruenciarendszert!
5. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a
$$z^2 + 2iz - 1 + i = 0$$
   egyenletet!
6. Számítsuk ki az $1-2i$ komplex szám négyzetgyökeit (trigonometrikus alak használata nélkül)!
7. Számítsuk ki $-243i$ összes ötödik gyökét trigonometrikus alakban!
8. Adjuk meg $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényként (a szokásos algebrai műveletek és a konjugálás segítségével) az alábbi síktranszformációt: $1+i$ körüli $60°$-os forgatás!
9. Adjuk meg annak a négyzetnek a másik két csúcsát, melynek két átellenes csúcsát két adott komplex szám z_1 és z_2 alkotják!
10. Mutassuk meg, hogy egy R gyűrűben $0a = 0$ és $(-a)b = -(ab)$.

*11 Legyenek a és n egynél nagyobb egészek. Mutassuk meg, hogy ha $a^n + 1$ prím, akkor n kettőhatvány!

*12 Mutassuk meg, hogy az
$$\begin{aligned} x &\equiv a \pmod{m} \\ x &\equiv b \pmod{n} \end{aligned}$$
kongruenciarendszer pontosan akkor oldható meg, ha $(m,n) \mid (a-b)$. Ha a rendszer megoldható, a megoldás egyértelmű modulo $[m,n]$.

*13 Mutassuk meg, hogy ha $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$, akkor
$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha,$$
ahol $z \in \mathbb{C}$ és $n \in \mathbb{Z}$.