

5. Házi feladat (határidő: 2016-10-14)

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 10 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 8 pontot el kell érni! Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Keressük meg az $2x^6 - x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x + 5$ polinom összes gyökét! Bontsuk fel e polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{C}[x]$ -ben és $\mathbb{R}[x]$ -ben!
2. Adjuk meg az alábbi polinomok gyöktényező alakját! (a) $x^n - 1$ (b) $x^{2n} - x^{2n-1} + \dots + x^2 - x + 1$
3. Adjuk meg azt a legalacsonyabbfokú egyfő-együtthetős
(a) komplex együtthetős
(b) valós együtthetős polinomot,
melynek i kétszeres, 1 háromszoros gyöke!
4. Határozzuk meg az összes irreducibilis másod- és harmadfokú polinomot $\text{GF}(2)$ felett! Irreducibilisek-e ezek \mathbb{Z} felett is?
5. Irreducibilis-e az $x^3 + 3x + 1$ polinom $\mathbb{Q}[x]$ -ben, $\mathbb{R}[x]$ -ben, illetve $\mathbb{Z}_5[x]$ -ben?
6. A Horner-séma alkalmazásával (a) osszuk el maradékosan a $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ polinomot a $q(x) = x + 1$ polinommal, és (b) írjuk át $p(x)$ -et $x + 1$ polinomjaként (azaz $x + 1$ hatványaival)!
7. Határozzuk meg az a együtthetőt úgy, hogy -1 legalább kétszeres gyöke legyen az $x^5 - ax^2 - ax + 1$ polinomnak!
8. Mit ad maradékosan a $3x^{21} - 2x^{14} + 5x^9 - 7$ polinom $(x - i)$ -vel, $(x + i)$ -vel, $x^2 + 1$ -gyel illetve $(x - 1)^3$ -nel osztva?
9. Milyen feltételek mellett osztható az $x^3 + px + q$ polinom az $x^2 + rx - 1$ polinommal?
10. Határozzuk meg az $x^3 - x^2 - 8x + 12$ polinom gyökeit a Rolle-féle gyöktétel segítségével!
- *11 Bizonyítsuk be, hogy az egész együtthetős $p(x)$ polinomnak nincs egész gyöke, ha $p(0)$ és $p(1)$ páratlan szám!
- *12 Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges legalább elsőfokú komplex $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomhoz van olyan $c \in \mathbb{C}$ szám, hogy $f(x) + c$ -nek többszörös gyöke legyen \mathbb{C} -ben. Igaz-e ez $f(x) \in \mathbb{R}$ -re $c \in \mathbb{R}$ -rel?