

## 7. Házi feladat (határidő: 2016-10-28)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámítá-  
sokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elege-  
dő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Számítsuk ki a  $\Phi_8(x)$  és  $\Phi_{10}(x)$  körosztási poli-  
nomokat, és bizonyítsuk be, hogy irreducibilisek  
 $\mathbb{Q}[x]$ -ben!
2. Legyenek  $a, b, c$  az  $x^3 - 2x^2 + 4x + 6$  polinom  
gyökei  $\mathbb{C}$ -ben. Adjunk meg egy harmadfokú poli-  
nomot, amelynek gyökei  $a+b$ ,  $a+c$  és  $b+c$ . (Ne  
számítsuk ki a gyököket, használjuk a gyökök és  
együtthatók közti összefüggéseket!)
3. Határozzuk meg az  $x+3y+z=2$  és  $x+2y+2z=$   
 $5$  egyenletű síkok metszetét! Ha a metszet egye-  
nes, adjuk meg az egyenes explicit egyenletét  
vektorosan és koordinátáinként is!
4. Adjuk meg a következő egyenletrendszer összes  
megoldását:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 4 \\ -x + y - z &= 2 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ 4x + 4y + 4z &= 1\end{aligned}$$

5. Adjuk meg a következő egyenletrendszer összes  
megoldását:

$$\begin{aligned}7x + 14y - 21z &= 7 \\ x + 2y - 3z &= 1 \\ 5x + 10y + 15z &= 5 \\ 3x + 6y - 9z &= 3\end{aligned}$$

(a) Mit jelent az egyenletrendszer megoldása  
a sormodellben? (b) Ki tudunk-e választani  
az eredeti egyenletek közül kevesebbet, melyek  
ugyanazt a megoldást adják? Melyeket? (c) Mit  
jelent az egyenletrendszer megoldása az oszlop-  
modellben?

6. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek:  
(a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és egyértel-  
mű a megoldása; (b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje

van, és egyértelmű a megoldása; (c) 5 egyenle-  
te, 6 ismeretlenje van és nincs megoldása; (d) 5  
egyenlete, 5 ismeretlenje van és pontosan 5 meg-  
oldása van (van-e ilyen valós, illetve véges test  
feletti egyenletrendszer)?

7. Az alábbi mátrixok közül melyek vannak lépcsős,  
illetve redukált lépcsős alakban? A redukált lép-  
csőseknél írjuk fel a mátrixhoz tartozó lineáris  
egyenletrendszer megoldását, vektoros alakban  
is!

$$\begin{aligned}(a) \quad & \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] & (b) \quad & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \\ (c) \quad & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & (d) \quad & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ (e) \quad & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]\end{aligned}$$

8. Az  $a$  és  $b$  paraméterek értékétől függően hány  
megoldása van a következő mátrixhoz tartozó va-  
lós egyenletrendszernek?

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 2 & a & 1 \end{array} \right]$$

9. Oldjuk meg a következő szimultán egyenletrend-  
szert!

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 1 & 2u + 3v &= 3 & 2a + 3b &= 0 \\ 4x + 6y &= 2 & 4u + 6v &= 0 & 4a + 6b &= 0\end{aligned}$$

10. Adjuk meg a  $2x - y + z = 1$  sík explicit és impli-  
cit egyenletét, illetve egyenletrendszerét! Oldjuk  
meg az egyenletet, mint egy egy egyenletből álló  
egyenletrendszert, és írjuk fel a megoldást vek-  
torosan!

\*11 Bizonyítsuk be, hogy ha  $p$  páratlan prím, akkor  
 $\Phi_{2p}(x) = \Phi_p(-x)$ . Lássuk be, hogy  $\Phi_{2p}(x)$  irre-  
ducibilis!

\*12 Milyen  $p$  prímeke igaz, hogy ha  $x_1, x_2, \dots, x_7 \in$   
 $\mathbb{Z}_p$ , és közülük bármely hatnak az összege 0, akkor  
mindegyik 0?