

## 8. Házi feladat (határidő: 2016-11-04)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Határozza meg az  $\mathbf{A}$  mátrix és az  $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$  bővített mátrix rangját  $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_3$  és  $\mathbb{R}$  felett! Mit mondhatunk az  $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$  mátrixú lineáris egyenletrendszer megoldhatóságáról mindhárom esetben!

2. Határozzuk meg a következő mátrix rangját!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2i & 1 + 2i \\ 3 & i & 3 - i \\ 4i & -3 & -1 + 4i \end{bmatrix}$$

3. Függetlenek-e az  $(1, 2, -1, 0)$ ,  $(1, 1, 2, 1)$ ,  $(2, 0, 1, 3)$  és az  $(1, 0, -4, 1)$  vektorok? Ha nem, akkor adjuk meg közülük az általuk generált altér egy bázisát és fejezzük ki segítségükkel a többi vektort. Írjuk fel mindegyik vektor koordinátavektorát e bázisra nézve!

4. Állítsuk elő a  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, 1, -1, 3)$  és  $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -2, -1)$  vektorok lineáris kombinációjaként az  $\mathbf{a} = (0, -1, 3, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 1, 0, 1)$  és  $\mathbf{c} = (3, 2, -2, 3)$  vektorok közül azokat, amelyeket lehet! (Használjunk szimultán egyenletrendszert!)

5. Az alábbi részhalmazok valamelyike alteret vagy affin alteret alkot-e  $\mathbb{R}^3$ -ben? Amelyik altér, annak adjuk meg egy bázisát is!

- (a)  $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{v}| = 1\}$   
 (b)  $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 0\}$   
 (c)  $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 1\}$

6. Mutassuk meg, hogy  $\mathbb{R}^{n^2}$ -ben a valós felsőháromszög-mátrixok alteret alkotnak. Adjunk meg benne bázist és adjuk meg az altér dimenzióját!

7. Tekintsük a  $\mathcal{B} = \{(1, 3, -1), (0, 1, 1), (2, -1, 0)\}$  bázist  $\mathbb{R}^3$ -ben. Melyik az a  $\mathbf{v}$  vektor, amelynek  $\mathcal{B}$  szerinti koordinátavektora  $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (1, 2, -1)$ , és mi a  $\mathbf{w} = (3, 0, -3)$  vektor koordinátavektora  $\mathcal{B}$  szerint?

8. Adjuk meg az alábbi mátrixhoz tartozó négy ki-tüntetett altér egy-egy bázisát!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

9. Adjuk meg az  $\langle(1, 2, -1)\rangle \leq \mathbb{R}^3$  altér merőleges kiegészítő alterének egy bázisát!

10. Adjuk meg az

$$\begin{aligned} x - y + z &= -2 \\ 2x + y + 3z &= 1 \\ x + 2y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen megoldását, és ennek segítségével írjuk fel az összes megoldást!

- \*11 Mutassuk meg, hogy minden egész elemű négyzetes mátrix megadott műveletekkel

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

alakra hozható, ahol csak a főátlóban vannak nem nulla elemek, és ha ezek  $d_1, d_2, \dots, d_n$  jelöli, akkor  $d_i \mid d_{i+1}$  ( $1, \dots, n-1$ ). Az átalakítás közben csak a következő elemi sor- és oszlopműveletek használhatók: sorcsere, sor szorzása  $-1$ -gyel, egy sor egész számmal való szorzatának egy másikhoz adása, és ugyanezen műveletek oszlopokra vonatkozó változatai.

- \*12 A  $c$  paraméter értékétől függően mennyi a rangja annak a valós  $n \times n$ -es mátrixnak, amelynek a főátlójában csupa  $c$ , az összes többi helyén 1 van?