9. Házi feladat (határidő: 2016-11-11)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Adjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lináris egyenletrendszer összes megoldását $\mathbb{Z}_3^3$-ban! Melyek esnek ezek közül $\mathbf{A}$ sorterébe?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^3$$

2. Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ páronként merőleges vektorok $\mathbb{R}^n$-ben.

   a) Mi a $\mathbf{v}_i$ vektorok skaláris szorzata az $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{v}_j$-vel?

   b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek!

3. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 2+i \\ 2 & 3-i \\ 3 & 4i \end{bmatrix}.$$

   Végezzük el az alábbi műveleteket, ha lehet: $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{D}^2$, $\mathbf{DD}^T$, $\overline{\mathbf{D}}$, $\mathbf{BC}$.

4. Keressünk olyan 2×2-es és 3×3-as $\mathbf{C}$ valós mátrixokat, melyekre: $\mathbf{C}^2 = \mathbf{O}$, de $\mathbf{C} \neq \mathbf{O}$.

5. Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ tetszőleges $n \times n$-es mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ mátrix főátlójában az elemek összege 0.

6. Oldjuk meg szimultán lineáris egyenletrendszerrel az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Keressük meg az összes olyan 2×2-es valós $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyik felcserélhető az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   mátrixszal! (Írjuk át az $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$ mátrixegyenletet az $\mathbf{X}$ elemeire vonatkozó lineáris egyenletrendszerré!)

8. Melyik oldalról kell megszorozni és milyen permutációs mátrixszal az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

   mátrixot, hogy a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   mátrixot kapjunk? E permutációs mátrix milyen elemi mátrixok szorzataként írható föl?

9. Bizonyítsuk be, hogy az $n \times n$-es szigorú felsőháromszög-mátrixok n-edik hatványa $\mathbf{O}$. (Szigorú felsőháromszög-mátrix az olyan négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, amelynek a főátlójában és a főátló alatt is csupa 0 van, azaz $a_{ij} = 0$, ha $j - i \leq 0$.)

10. Hogyan változhat a mátrix rangja, ha egyetlen eleméhez hozzáadunk 1-et? Adjunk példát mindegyik esetre!

*11. Hány egy, illetve kétdimenziós altere van $\mathbb{Z}_p^3$-nek, ha p prím?

*12. Melyek azok az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok, amelyek minden valós $n \times n$-es mátrixszal felcserélhetők?