10. Házi feladat (határidő: 2016-11-18)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Számítsuk ki az alábbi szorzatot 4×4-es mátrixok szorzataként, és a blokkmátrixos felbontás használatával is!
$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \hline \mathbf{O} & -\mathbf{I} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{array}\right]$$

2. Elemi sorműveletekkel számítsuk ki a következő mátrix inverzét!
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Bontsuk fel a $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ mátrixot elemi mátrixok szorzatára!

4. Adjuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert LU-felbontás segítségével, ahol $\mathbf{A}$ az előző feladatbeli mátrix és $\mathbf{b} = (5, -1, 3, 7)$.

6. Adjuk meg az alábbi mátrix PLU-felbontását:
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Bontsuk fel az alábbi mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus (antiszimmetrikus) mátrix összegére!
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Határozzuk meg az $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ mátrixot ($n \in \mathbb{N}$)!

9. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$
(a) Határozzuk meg $\mathbf{A}$ bázisfelbontását!
(b) Ezt felhasználva bonsuk fel $\mathbf{A}$-t $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ darab diád összegére!

10. Legyen $\mathcal{A} := \{(1,0,1), (1,1,1), (1,-1,0)\}$, $\mathcal{B} := \{(1,2,2), (-1,0,1), (1,1,-1)\}$.
(a) Mutassuk meg, hogy ezek $\mathbb{R}^3$ két bázisa!
(b) Írjuk fel az $\mathbf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ áttérési mátrixot!
(c) Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = (1, 1, -1)$ egy $\mathbf{v}$ vektor koordinátavektora az $\mathcal{A}$ bázisban. Mi lesz $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$?

11*. Számítsuk ki az $\mathbf{A}^{100}$ mátrixot, ha
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 6 & -5 & 3 & 6 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 & -4 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

12*. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_p$ feletti $n \times n$-es invertálható mátrixok számát!