1. a) Hányféleképpen lehet 8 gyereket leültetni egy sorba?
b) Hányféleképpen lehet 8 gyereket felültetni egy 8 hintából álló körhintára?
c) Hányféleképpen lehet 8 gyereket leültetni egy kerek asztal köré, ha csak az számít, hogy kinek kik a szomszédai?
d) Hányféle lehet egy n fős futóverseny első 3 helyezése?
e) Hány k elemű részhalmaza van egy n elemű halmaznak?
f) Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

2. Bizonyítsuk be a binomiális tételt: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

3. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

4. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$, ha $n > 0$.

5. Bizonyítsuk be, hogy
a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;
b) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$;
c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

6. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy a Pascal-háromszög n-edik sorának elemei éppen az $\binom{n-1}{k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ binomiális együtthatók.

7. a) n ember között k db egyforma tárgyat hányféleképp oszthatunk ki, hogy mindenki kapjon legalább egyet?
b) n ember között k db egyforma tárgyat hányféleképp oszthatunk ki, ha nem feltétlenül kap mindenki legalább egyet?

8. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy
a) $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$;
b) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = n(4n^2-1)/3$;
c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

9. Legyen $f_0 := 0$, $f_1 := 1$, $f_2 := 1$, $\ldots$, $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ az ú.n. Fibonacci-sorozat. Hányféleképpen fedhető le dominóval egy $2 \times n$-es sakktábla? Hozzuk kapcsolatba a Fibonacci-sorozattal!

Házi feladatok

Beadási határidő: szeptember 10.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Bizonyítsuk be a polinomiális tételt:

$$(a_1 + ... + a_k)^n = \sum_{i_1+...+i_k=n, 0\le i_1,...i_k\le n} \frac{n!}{i_1!...i_k!} a_1^{i_1}...a_k^{i_k}.$$

2. Bizonyítsuk teljes indukcióval a következő összefüggést!

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

3. Hány olyan n-hosszú 0-1-sorozat van, amelyben nincs két 0 egymás mellett?

4. Határozzuk meg az első n Fibonacci-szám összegét!

5. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy az n-edik Fibonacci-szám

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

6. Legyen $g_n := g_{n-1} + g_{n-2}, g_0 := a, g_1 := b$. Igazoljuk, hogy $g_n = af_{n-1} + bf_n$.

7*. Bizonyítsuk be, hogy
a) $n = 2^k$-ra és $0 < m < n$-re $\binom{n}{m}$ mindig páros;
b) $n = 2^k - 1$-re és $0 \le m \le n$-re $\binom{n}{m}$ mindig páratlan!