1. Bizonyítsuk be a legnagyobb közös osztó következő tulajdonságait! Ne használjuk a prímfaktorizációt, csak az euklideszi algoritmust!

(i) Ha a, b-re alkalmazzuk az euklideszi algoritmust és a maradékok $r_1, r_2, \cdots, r_n, 0$, akkor $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \cdots = (r_{n-1}, r_n) = (r_n, 0)$.

(ii) Ha $a, b, c \in \mathbb{Z}$ és $c > 0$ akkor $(ca, cb) = c(a, b)$.

(iii) Ha $(a, b) = d$ akkor $(a/d, b/d) = 1$.

(iv) $(a + nb, b) = (a, b)$ minden n egész számra.

(v) Ha $c|ab$ és $(c, a) = 1$, akkor $c|b$. Használjuk a (iii)-at.

2. (Kibővített euklideszi algoritmus) Az euklideszi algoritmus felhsználásával mutassuk meg, hogy minden a, b egész számhoz léteznek olyan α, β egész számok, hogy $\alpha a + \beta b = d$, ahol $d = (a, b)$.

3. A 2. feladat segítségével adjunk másik bizonyítást 1.(v)-re.

4. a) Osszuk el maradékosan 20-at és -20-at 7-tel és -7-tel.

b) Határozzuk meg $20/7, -20/7$ felső és alsó egész részeit.

5. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal $(288, 204)$-et és állísuk elő a legnagyobb közös osztót egész együtthatós lineáris kombinációként.

6. (Diofantoszi egyenlet)

(i) Mutassuk meg, hogy ha a, b, c egész számok, és $ax + by = c$-nek van egész (x, y) megoldása, akkor $(a, b)|c$.

(ii) Fordítva, ha $(a, b)|c$, akkor van (x, y) megoldása az egészek körében $ax + by = c$-nek.

(iii) Mutassuk meg, hogy ha (x_0, y_0) és (x', y') két megoldása $ax + by = c$-nek az egészek körében, akkor van olyan t egész szám, hogy $x' = x_0 + (b/d)t$ és $y' = y_0 - (a/d)t$. Azaz a diofantoszi egyenlet összes megoldása egy megoldása segítségével kifejezhető és minden ilyen alakú (x', y') számpár megoldása a diofantoszi egyenletnek, ha t egész és (x_0, y_0) megoldás.

7. Megoldhatók-e az alábbi diofantoszi egyenletek? Ha igen, adjuk meg az összes megoldásukat!

a) $288x + 204y = 1$

b) $288x + 204y = 48$

8. a) Váltsuk át 26-ot $10, 16, 8, 4, 2, 5, 26$ alapú számrendszerbe.

b) Váltsuk át 1001-et 2-es, 8-as és 16-os számrendszerbe.

9. Horner-módszerrel helyettsítsük be 5-öt a $p(x) = x^5 - 3x^2 + x + 3$ polinomba.

10. Adjuk meg 120201_3-at tizes számrendszerben Horner módszerrel.

Házi feladatok

Beadási határidő: szeptember 17.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Mely halmazok jólrendezett halmazok az alábbiak közül?
a) páros számok,
b) pozitív páros számok,
c) nemnegatív racionális számok,
d) a $[0,1]$ intervallumba eső számok,
e) egész számok négyzetei,

2. Igazoljuk, vagy adjunk ellenpéldát!
a) két racionális szám összege racionális,
b) egy racionális és egy irracionális szám összege irracionális,
c) két irracionális szám összege irracionális.

3. Mennyi az értéke a következő kifejezéseknek?
a) $\left\lceil \left\lfloor \frac{3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor -\frac{3}{4} \right\rfloor \right\rceil$,
b) $\left\lfloor \left\lceil \frac{3}{4} \right\rceil + \left\lceil -\frac{3}{4} \right\rceil \right\rfloor$,
c) $\left\{ \frac{7}{4} \right\} + \left\{ -\frac{7}{4} \right\} + \{-1\}$,
d) $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ $(x \in \mathbb{R})$

4. Adjuk meg 101100111000_2 és 43210_5 értékét 10-es számrendszerben (Horner-módszerrel), és 3333 bináris, oktális, hexadecimális, valamint 5-ös számrendszerbeli alakját!

5. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal $(324, 276)$ értékét, és keressünk olyan x és y számot, melyre $324x + 276y = (324, 276)$.

6. Oldjuk meg a $155x + 195y = 5000$ diofantoszi egyenletet! Hány 155 forintos és hány 195 forintos árut vásároltunk, ha épp 5000 forintot fizettünk?

7*. A Nim nevű játékot néhány kupac gyufaszállal játssza két játékos. Felváltva elvesznek néhány (legalább egy, de akár az összes) gyufaszálat az egyik kupacból. Az nyer, akié az utolsó gyufaszál. Adott méretű kupacok mellett melyik játékosnak van nyerő stratégiája? [Útmutatás: írjuk fel a kupacok méretét binárisan, majd e számokat írjuk egymás alá helyiérték szerint. Igazoljuk, hogy a második játékosnak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha minden helyiértéken páros az 1-esek száma.