1. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$ és $d \in \mathbb{N}^+$. Mutassuk meg, hogy az x-nél nem nagyobb, d-vel osztható pozitív egészek száma $\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$.

2. Mutassuk meg, hogy $n!$ prímtényezős felbontásában p kitevője $\sum \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$

3. Bizonyítsuk be, hogy n, a, b pozitív egészekre $\left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor$.

4. Hány nullára végződik 100!?

5. Bizonyítsuk be, hogy a szomszédos Fibonacci-számok relatív prímek.

6. Mutassuk meg, hogy
a) $4k + 1$ alakú számok szorzata $4k + 1$ alakú.
b) végtelen sok $4k + 3$ alakú prímszám van (Útmutatás: tekintsük a $4p_1p_2 \ldots p_n - 1$ számot, ahol a p_i prímek mindegyike $4k + 3$ alakú.)

7. Határozzuk meg 2^{67} mod 71 értékét!

8. A páros számok körében definiált oszthatóságra nézve mely számok írhatók fel lényegében egyértelműen felbonthatatlanok szorzataként?

9. Mutassuk meg, hogy $a|c$ és $b|c$ pontosan akkor teljesül, ha $[a, b]|c$. Adjunk példát, hogy $a|c$ és $b|c$-ből nem következik $ab|c$.

10. Mutassuk meg, hogy ha $a, n \geq 2$, és $a^n - 1$ prím, akkor $a = 2$ és n prím.

11. Mutassuk meg, hogy egy szám 9-cel való osztási maradéka a számjegyek összegének 9-cel való osztási maradéka. Fogalmazzunk meg hasonló szabályt 11-re.

Házi feladatok

Beadási határidő: szeptember 24.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Mutassuk meg, hogy $n!+1$-nek minden prímosztója n-nél nagyobb ($n \in \mathbb{N}^+$)! Vezessük le ebből, hogy végtelen sok prímszám van!

2. Bizonyítsuk be, hogy hat egymást követő természetes szám közül mindig kiválasztható egy, amelyik relatív prím az összes többihez.

3. Határozzuk meg az alábbi számok legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét!
a) $2^{23}3^{10}7^{13}$, $2^{15}7^{10}13^5$
b) $2^{23}3^{10}7^{13}$, $2^{15}7^{10}13^5$, $3^{15}7^{20}11^2$.

4. Számítsuk ki 25^{101} mod 11 értékét!

5. Hány 0-ra végződik az 1234! szám?

6. Bizonyítsuk be, hogy minden $a, b > 1$ egész számra

$$[a, b] \mid a + b \Leftrightarrow a = b.$$

7*. Bizonyítsuk be, hogy minden $a > 1$, $m, n \geq 1$ egész számra $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.

8**. Bizonyítsuk be, hogy az

$$n! + 1, n! + 2, \ldots, n! + n$$

számok mindegyikének van olyan prímosztója, amely nem osztója a többi számnak! [Ötlet: igazoljuk, hogy mindegyik fenti számnak van $n/2$-nél nagyobb prímosztója.]