1. Oldjuk meg a következő lineáris kongruenciákat!
a) $12x \equiv 15 \pmod{21}$
b) $12x \equiv 4 \pmod{2}$

2. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert!

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$
$$x \equiv 3 \pmod{5}$$
$$x \equiv 4 \pmod{7}$$

3. a) Határozzuk meg $5^{-1} \bmod 26$ értékét!
b) Az a)-beli megoldás segítségével oldjuk meg az alábbi kongruenciát:

$$5x \equiv 7 \pmod{26}$$

c) Invertálható-e 4 modulo 26?

4. a) Mutassuk meg, hogy $\varphi(p) = p - 1$, és $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$, ha p prím.
b) Bizonyítsuk be, hogy ha p végigfut n prímosztóin, akkor

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

5. Készítsük el a Z_5 és Z_6 összeadás- és szorzástábláját!
Készítsük el a $\bmod 6$ redukált maradékosztályok szorzástábláját!

6. a) Mutassuk meg, hogy ha $(m, n) = 1$, akkor $(a \bmod m, b \bmod n) \to c \bmod mn$ leképezés bijekció $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ és $\mathbb{Z}_{mn}$ között, ahol c megoldása az alábbi kongruencia rendszernek:

$$x \equiv a \pmod{m}$$
$$x \equiv b \pmod{n}$$

b) Mutassuk meg, hogy az előző bijekció bijekciót ad a $(a \bmod m, b \bmod n)$ redukált maradékosztálypárok és a $\bmod mn$ redukált maradékosztályok között is!
c) Mutassuk meg, hogy ha $(m, n) = 1$ akkor $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.
d) Mutassuk meg, hogy az a)-beli leképezés kompatibilis az összeadással és a szorzással.

7. Határozzuk meg az alábbi értékeket!:
a) $\varphi(23)$, $\varphi(8)$, $\varphi(24)$
b) $7^{23} \bmod 23$, $5^{\varphi(8)} \bmod 8$, $5^8 \bmod 24$, $(15)^8 \bmod 24$

8. Adjuk meg az alábbi komplex számok algebrai alakját:
a) $(3 - 4i)(7 + 8i)$ b) $(3 - 4i)/(2 - i)$ c) i^{2018} d) $(1 + i)^9$

10. Mi a mértani helye a síkon azon pontoknak, amelyeknek megfelelő z komplex számokra:
a) $|z - 5 + i| = 2$ b) $|z - i| = |z + i|$ c) $|(z - 3 + 4i)/(z - i)| \geq 1$
d) $|z| = 3iz$ e) $z + \overline{z} < 4$ f) $2z + 5 = 2\overline{z}$.

Házi feladatok

Beadási határidő: október 1.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Oldjuk meg a következő lineáris kongruenciákat!
a) $4x \equiv 6 \pmod{14}$,
b) $4x \equiv 6 \pmod{16}$,
c) $4x \equiv 8 \pmod{16}$.

2. Számítsuk ki $3^{-1} \bmod 13$, $3^{-1} \bmod 26$ és $3^{-1} \bmod 52$ értékét!

3. Készítsük el a modulo 12 összeadás és szorzás művelettábláját! Készítsük el a modulo 12, illetve modulo 8 redukált maradékosztályok szorzástábláját!

4. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert!

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{3} \\ x &\equiv 1 \pmod{4} \\ x &\equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

5. Adjuk meg az alábbi értékeket:
a) $\varphi(19)$, $\varphi(16)$, $\varphi(18)$
b) $3^{19} \bmod 19$, $3^{\varphi(16)} \bmod 16$, $3^{6} \bmod 18$.

6. Határozzuk meg az $\dfrac{(1+2018i)^{2018}}{(1-2018i)^{2018}}$ komplex szám abszolút értékét!

7*. Adott $m \in \mathbb{N}^+$-ra határozzuk meg az összes olyan b egész számot, amelyre

$$\{\, t_1 + b,\ t_2 + b,\ \ldots,\ t_{\varphi(m)} + b \,\}$$

redukált maradékrendszer modulo m, ha $\{\, t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{\varphi(m)} \,\}$ redukált maradékrendszer modulo m!

8*. Mutassuk meg, hogy az alábbi kongruencia rendszer pontosan akkor oldható meg, ha $(m,n) \mid (a-b)$. Ha a rendszer megoldható, a megoldás egyértelmű modulo $[m,n]$.

$$\begin{aligned} x &\equiv a \pmod{m} \\ x &\equiv b \pmod{n} \end{aligned}$$