1. Osszuk el maradékosan az $x^4 - 2x + 5$ polinomot
a) $x^2 - x + 2$-vel,
b) $x + 1$-gyel,
c) $(x+1)^2$-nel!

2. Horner-séma segítségével írjuk fel az $x^3 + 2x^2 + 1$ polinomot $(x - 3)$ hatványai szerint rendezve!

3. Határozzuk meg $x^3 - 2x^2 + x - 1$ és $x^2 + 2$ legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmussal és állitsuk elő a legnagyobb közös osztót ezen polinomok polinomegyütthatós lineáris kombinációjaként! (Kibővített euklideszi algoritmus)

4. Határozzuk meg az alábbi polinomok gyökeit. Bontsuk fel őket irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben:
a) $x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$
b) $x^5 + 1$

5. Adjuk meg $\mathbb{Z}_2$ felett az irreducibilis másodfokú polinomokat! Irreducibilisek-e ezek $\mathbb{Z}$ felett is?

6. Adjuk meg azt a legalacsonyabbfokú egyfőegyütthatós
a) komplex együtthatós
b) valós együtthatós polinomot, amelynek i kétszeres, 1 háromszoros gyöke!

7. Határozzuk meg az $(x-2)^2(x+i)^5(x-3)(x-4)^2$ és az $(x-2)(x+i)^2(x-3)^3$ polinom legnagyobb közös osztóját!

8. Mutassuk meg, hogy páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke!

9. Határozzuk meg az a együtthatót úgy, hogy -1 legalább kétszeres gyöke legyen az

$$x^5 - ax^2 - ax + 1$$

polinomnak!

10. Adjuk meg az alábbi polinomok komplex gyöktényezős alakját! Irreducibilisek-e $\mathbb{R}$ felett?
a) $x^3 - 1$
b) $x^n + 1$
c) $x^2 + x + 1$

Házi feladatok

Beadási határidő: október 15.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. A Horner-séma alkalmazásával
  a) osszuk el maradékosan a $p(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ polinomot a $q(x) = x + 1$ polinommal, és
  b) írjuk fel $p(x)$-et $x + 1$ polinomjaként (azaz $x + 1$ hatványaival)!

2. A $p, q, r \in \mathbb{R}$ milyen értékeire osztható az $x^3 + px + q$ polinom az $x^2 + rx - 1$ polinommal?

3. Legyen $p(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 2$ és $q(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.
  a) Határozzuk meg $p(x)$ és $q(x)$ legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmussal, és
  b) kibővített euklideszi algoritmussal adjunk meg olyan $\alpha(x)$ és $\beta(x)$ polinomot, hogy $\alpha(x)p(x) + \beta(x)q(x) = (p(x), q(x))$ legyen.

4. Határozzuk meg $x^n - 1$ és $x^k - 1$ közös gyökeit! Mutassuk meg, hogy az ezekhez tartozó gyöktényezők szorzata $x^d - 1$, ahol $d = (n, k)$!

5. Bontsuk fel az $x^8 - 1$ polinomot $\mathbb{C}$, illetve $\mathbb{R}$ fölött irreducibilis polinomok szorzatára!

6. Határozzuk meg az összes irreducibilis harmadfokú polinomot $\mathbb{Z}_2$ felett!

7*. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges legalább másodfokú komplex $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomhoz van olyan $c \in \mathbb{C}$ szám, hogy $f(x) + c$-nek többszörös gyöke legyen $\mathbb{C}$-ben. Igaz-e ez $f(x) \in \mathbb{R}[x]$-re $c \in \mathbb{R}$-rel?