1. Legyen R kommutatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrű, $r \in R$ nem nulla és nem egység. Mutassuk meg, hogy ha r prímtulajdonságú elem, akkor r felbontathatatlan, azaz minden $r = ab$ R-beli felbontás esetén a vagy b egység, azaz $a|1$ vagy $b|1$.

2. Mutassuk meg, hogy egy racionális együtthatós, $\mathbb{Q}$ felett irreducibilis polinomnak nem lehet $\mathbb{C}$-ben többszörös gyöke.

3. Legyenek $f_1(x), f_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomok. Mutassuk meg mod p átmenettel, hogy ha egy p prímszám osztja $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ minden együtthatóját, akkor vagy $f_1(x)$, vagy $f_2(x)$ minden együtthatóját osztja, azaz p $\mathbb{Z}[x]$-ben prímtulajdonságuú.

4. a) Bizonyítsuk be a Schönemann-Eisenstein-kritériumot mod p átmenettel.
b) Bizonyítsuk be a fordított Schönemann-Eisenstein kritériumot mod p átmenettel.
c) Mutassuk meg, hogy ha $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom, és $c \in \mathbb{Z}$, akkor $p(x)$ pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett, ha $p(x+c)$ az.

5. Irreducibilis-e $\mathbb{Q}$ felett:
a) $x^4 + 10x + 5$, $5x^4 + 10x + 1$;
b) $x^n + p$, ahol p prím;
c) $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$, ha p prím? Mik ennek a polinomnak a gyökei?
d) $\dfrac{x^5+1}{x+1}$?

6. Legyen $\Phi_n(x) = \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - \varepsilon_i) \in \mathbb{C}[x]$, ahol $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\varphi(n)}$ a primitív n-edik egységgyökök (ez az n-edik **körosztási polinom**). Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

7. Határozzuk meg az $x^3 + 6x^2 + 21x + 52$ polinom gyökeit
a) a Cardano-formula segítségével,
b) a Rolle-féle gyöktétel segítségével.

8. Határozzuk meg az alábbi polinomok gyökeit. Bontsuk fel őket irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben, $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{Z}[x]$-ben. Határozzuk meg a gyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét.
a) $2x^6 + x^5 - 3x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 2$
b) $x^6 + 1$

9. Adjuk meg azt a legkisebbfokú $p(x)$ polinomot, amelyre $k = 1, 2, 3, 4$ esetén $p(x_k) = y_k$:

x_k	-1	0	1	2
y_k	-10	-5	0	5

10. Fejezzük ki az $x^3 + y^3 + z^3$ polinomot x, y, z elemi szimmetrikus polinomjainak polinomjaként!

Házi feladatok

Beadási határidő: október 24.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Legyen $f(x) = x^6 - 7x^4 + 12x^2 + 2x - 4$.
a) Keressük meg $f(x)$ racionális gyökeit!
b) Bontsuk fel $f(x)$-et irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{Z}_5[x]$-ben!

2. Határozzuk meg azokat a $c \in \mathbb{Z}$ számokat, amelyekre az $x^3 + 2x^2 + cx + 4$ polinomnak van racionális gyöke!

3. a) Mutassunk $\mathbb{Z}[x]$-beli 3-adfokú polinomot, amelynek nincs $\mathbb{Z}$-ben gyöke, de nem irreducibilis $\mathbb{Z}[x]$-ben!
b) Mutassuk meg, hogy minden olyan F test feletti legfeljebb 3-adfokú polinom, amelynek nincs F-ben gyöke, irreducibilis, de ez negyedfokú polinomokra már nem igaz!

4. Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x^3 + 2x + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Q}[x]$-ben, de semelyik $a \in \mathbb{Z}$ számmal nem teljesíti az $f(x + a)$ polinom a Schönemann–Eisenstein-kritériumot!

5. Számítsuk ki a $\Phi_8(x)$ és $\Phi_{10}(x)$ körosztási polinomokat, és bizonyítsuk be $\Phi_8(x)$ irreducibilitását $\mathbb{Q}[x]$-ben!

6. Tudjuk, hogy ha p prím, akkor minden $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ függvényhez van olyan legfeljebb $p-1$-edfokú $q(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinom, hogy minden $a \in \mathbb{Z}_p$-re $f(a) = q(a)$. Keressük meg azt a $q(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$ polinomot, melyre

a	0	1	2	3	4
$q(a)$	2	3	0	0	0

7*. Mutassuk meg, hogy ha ε_1 primitív k-adik egységgyök, ε_2 primitív ℓ-edik egységgyök és $(k, \ell) = 1$, akkor szorzatuk primitív $k\ell$-edik egységgyök, és minden primitív $k\ell$-edik egységgyök egy pimitív k-adik és egy primitív ℓ-edik egységgyök szorzata!

8*. Határozzuk meg azokat a $c \in \mathbb{Z}$ számokat, amelyekre az $x^3 + 3x^2 + cx + c$ polinomnak van racionális gyöke!