1. Az alábbi mátrixok közül melyek vannak lépcsős, illetve redukált lépcsős alakban? A redukált lépcsőseknél írjuk fel a mátrixhoz tartozó lineáris egyenletrendszer megoldását vektoros alakban is!

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

a) $$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ -x + y - z &= 2 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ 4x + 4y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 7x + 14y - 21z &= 7 \\ x + 2y - 3z &= 1 \\ 5x + 10y + 15z &= 5 \\ 3x + 6y - 9z &= 3 \end{aligned}$$

c) Mit jelent az egyenletrendszerek megoldása a sormodellben?
d) Mit jelent az oszlopmodellben?
e) Ki tudunk-e választani az eredeti egyenletek közül kevesebbet, melyek ugyanezt a megoldást adják? Melyeket?

3. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek:
a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és egyértelmű a megoldása;
b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
c) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és nincs megoldása;
d) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van és pontosan 5 megoldása van (van-e ilyen valós, illetve véges test feletti egyenletrendszer)?

4. Az a és b paraméterek értékétől függően hány megoldása van a következő mátrixhoz tartozó valós egyenletrendszernek? Oldjuk meg a feladatot $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött is!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 2 & -a & | & b \\ 1 & 3 & a & | & 0 \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg az $x + 3y + z = 2$ és $x + 2y + 2z = 5$ egyenletű síkok metszetét! Ha a metszet egyenes, adjuk meg az egyenes explicit egyenletét vektorosan és koordinátánként is!

6. Adjuk meg a $2x - y + z = 1$ sík explicit egyenletét, illetve egyenletrendszerét: oldjuk meg az egyenletet, mint egy egy egyenletből álló egyenletrendszert, és írjuk fel a megoldást vektorosan is!

7. Legyen $\mathbf{a} = (1, 0, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 2, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$. Lássuk be, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan függetlenek. A $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 0)$ és $\mathbf{w} = (1, 1, 1, 1)$ vektorok közül azt amelyiket lehet, állítsuk elő az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként!

8. Mutassuk meg, hogy vektorteret alkotnak az alábbiak. Határozzuk meg e vektorterek dimenzióját. Adjunk meg bennük bázist is.
a) $V = \mathbb{C}$, $F = R$ b) $V = M_n[\mathbb{R}]$, $F = \mathbb{R}$ c) $V = F[x]$, F test felett
d) Mutassuk meg, hogy a valós $n \times n$-es szimmetrikus mátrixok (azaz amelyek megegyeznek a transzponáltjukkal) alterét alkotják $M_n[\mathbb{R}]$-nek. Adjuk meg ennek is a dimenzióját és egy bázisát.

Házi feladatok

Beadási határidő: november 5.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ x - z &= -2 \\ 2x + y + z &= 7 \end{aligned}$$

2. Az a és b értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek?

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= -1 \\ x - y + 2z &= a \\ x + by + z &= 3 \end{aligned}$$

3. Legyen adva egy k egyenletből és n ismeretlenből álló racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer. Döntsük el melyek igazak az alábbiak közül:

a) Ha $k \leq n$, akkor az egyeletrendszernek van megoldása.

b) Ha $k > n$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.

c) Ha $k < n$ és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor vgtelen sok megoldása is van.

d) Ha $k > n$ és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor csak 1 megoldása van.

e) Ha létezik valós megoldás, akkor létezik (csupa) racionális megoldás is.

f) Ha bármely $k - 1$ egyenletet kiválszatva az így kapott egyenletrendszernek van megoldása, akkor az eredetinek is van megoldása.

4. Határozzuk meg a $2x-y+3z = 3$, $x+y+z = 4$, $3y-z = 5$ egyenletű síkok metszetét. Ha a metszet egyenes, akkor adjuk meg az egyenes egyenletét vektorosan és koordinátánként is!

5. Milyen n-re függetlenek a $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, \ldots, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, \ldots, 0, 0)$, …, $\mathbf{v}_{n-1} = (0, 0, \ldots, 1, 1)$, $\mathbf{v}_n = (1, 0, \ldots, 0, 1)$ vektorok K^n-ben, ha $K = \mathbb{R}$, illetve ha $K = \mathbb{Z}_2$? Amikor összefüggők, akkor adjuk is meg egy nemtriviális lineáris kombinációjukat, aminek eredménye a $\mathbf{0}$ vektor!

6. Mutassuk meg, hogy az $n \times n$-es valós felső háromszögmátrixok alteret alkotnak $M_n[\mathbb{R}]$-ben. (egy mátrix felső háromszögmátrix, ha főátlója alatt csupa nulla van benne). Határozzuk meg ennek az altérnek a dimenzióját és adjunk meg ebben az altérben egy bázist.

7*. Hány 1- és 2-dimenziós altere van $\mathbb{Z}_p^3$-nek, ha p prím?