1. Függetlenek-e az $(1,2,-1,0)$, $(1,1,2,1)$, $(2,0,1,3)$ és az $(1,0,-4,1)$ vektorok? Ha nem, akkor adjuk meg közülük az általuk generált altér egy bázisát és fejezzük ki segítségükkel a többi vektort. Írjuk fel mindegyik vektor koordinátavektorát e bázisra nézve! A feladatot ezen oszlopokból álló mátrix redukált lépcsős alakra hozásával oldjuk meg.

2. Állítsuk elő a $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,1,-1,3)$ és $\mathbf{v}_3 = (0,1,-2,-1)$ vektorok lineáris kombinációjaként az $\mathbf{a} = (0,-1,3,-1)$, $\mathbf{b} = (1,1,0,1)$ és $\mathbf{c} = (3,2,-2,3)$ vektorok közül azokat, amelyeket lehet! (Használjunk szimultán egyenletrendszert!)

3. a) Hozzuk redukált lépcsős alakra az alábbi A mátrixot!
b) Álljon a B mátrix az A azon oszlopaiból, amelyek a redukált lépcsős alak vezéregyest tartalmazó oszlopainak felelnek meg (bázisoszlopok), és legyenek az R mátrix sorai az A redukált lépcsős alakjának nem nulla sorai (mindkét esetben megtartva a sorrendet is). Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A = BR$ Ezt nevezik az A mátrix **bázisfelbontásának**.
c) A bázisfelbontás segítségével bontsuk A-t 1-rangú márixok összegére, úgynevezett **diádokra**: $A = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{o}_i\mathbf{s}_i$, ahol $\mathbf{o}_i$-k a B oszlopai és $\mathbf{s}_i$-k az R sorai.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Tekintsük a $\mathcal{B} = \{(1,3,-1),\ (0,1,1),\ (2,-1,0)\}$ bázist $\mathbb{R}^3$-ben. Melyik az a $\mathbf{v}$ vektor, amelynek $\mathcal{B}$ szerinti koordinátavektora $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (1,2,-1)$, és mi a $\mathbf{w} = (3,0,-3)$ vektor koordinátavektora $\mathcal{B}$ szerint? Adjuk meg a standard bázis és $\mathcal{B}$ bázis közötti átmeneti mátrixot.

5. Bizonyítsuk be, hogy
a) ha A, B azonos alakú F test feletti mátrixok, akkor $r(A+B) \le r(A) + r(B)$;
b) ha A, B összeszorozható mátrixok, akkor $r(AB) \le r(A)$ és $r(AB) \le r(B)$;
c) egy mátrix rangja megegyezik a minimális számú diádra való felbontásában a diádok számával.

6. Az alábbi részhalmazok valamelyike alteret vagy altér eltoltját alkotja-e $\mathbb{R}^3$-ben? Amelyik altér, annak adjuk meg egy bázisát is!
a) $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{v}| = 1\}$ b) $\{(x,y,z) \mid x + 2y + z = 0\}$ c) $\{(x,y,z) \mid x + 2y + z = 1\}$

7. Adjuk meg az alábbi A mátrix rangját, és kitüntetett altereinek ($S(A)$, $N(A)$, $O(A)$, $N(A^T)$) egy-egy bázisát! $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

8. a) Bizonyítsuk be, hogy két altér metszete mindig altér, de két altér uniója pontosan akkor altér, ha a kettő közül valamelyik tartalmazza a másikat!
b) Mutassuk meg, hogy ha W_1, W_2 egy V_F vektortér két altere, akkor a legszűkebb altér, ami őket tartalmazza $W_1 + W_2 := \{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_1 \in W_1, \mathbf{w}_2 \in W_2\}$ (alterek összege, vagy generátuma), és $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.

9. a) Mutassuk meg, hogy R^n egy alterére merőleges vektorok alteret alkotnak.
b) Adjuk meg az $U = \langle (1,2,-1) \rangle \le \mathbb{R}^3$ altérre merőleges vektorok $U^\perp$ alterének egy bázisát!

10. Mutassuk meg, hogy véges dimenziós vektortér minden valódi altere kisebb dimenziós, de végtelen dimenziós vektortérben ez nem igaz!

Házi feladatok

Beadási határidő: november 12.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Határozzuk meg a következő mátrix rangját! $\begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i \end{bmatrix}$.

2. Oldjuk meg szimultán lineáris egyenletrendszerrel az $AX = B$ mátrixegyenletet, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy az A mátrix oszlopai bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ban, és írjuk fel a B mátrix oszlopvektorainak koordinátavektorait ebben a bázisban!

3. Adjuk meg az alábbi A mátrix négy kitüntetett alterének egy-egy bázisát:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Adjuk meg az $\mathcal{U} = \langle (1,2,0,1), (1,-3,-1,-1) \rangle \leq \mathbb{R}^4$ altér merőlegesének, $U^\perp$-nek egy bázisát.

5. a) Altér-e vagy altér eltoltja-e $\mathbb{R}^3$-ban az xy sík és a z tengely uniója?
b) Altér-e, vagy altér eltoltja-e $\mathbb{R}^2$-ben egy origón átmenő egyenes?
c) Altér-e vagy altér eltoltja-e $\mathbb{R}^2$-ben egy origón át nem menő egyenes?

6. Adjuk meg a 3. feladatbeli A mátrix bázisfelbontását, valamint $r(A)$ darab diád összegeként való előállítását.

7*. A c paraméter értékétől függően mennyi a rangja annak a valós $n \times n$-es mátrixnak, amelynek a főátlójában csupa c, az összes többi helyén 1 van?