1. Legyen $\mathcal{A} := \{(1,2,2),(-1,0,1),(1,1,-1)\}$, $\mathcal{B} := \{(1,0,1),(1,1,1),(1,-1,0)\}$.
a) Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ is bázisa $\mathbb{R}^3$-nak!
b) Írjuk fel a $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ áttérési mátrixot!
c) Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = (2,1,1)$ egy $\mathbf{v}$ vektor koordinátavektora az $\mathcal{A}$ bázisban. Mi lesz $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$?

2. a) Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát a kifejtési tétel segítségével!
b) Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét az inverzmátrixra vonatkozó képlettel!
c) Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét elemi sorműveletekkel!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. a) Mutassuk meg, hogy diagonális mátrixok szorzata diagonális mátrix! Mi egy diagonális mátrix determinánsa? Mikor invertálható egy diagonális mátrix, és mi az inverze?
b) Mutassuk meg, hogy felső háromszögmátrixok szorzata felső háromszögmátrix. Mi lesz a determinánsa? Mutassuk meg, hogy ha van inverze, akkor az is felső háromszögmátrix!
c) Határozzuk meg az elemi mátrixok determinánsát és inverzét!

4. Bontsuk fel a

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

mátrixot elemi mátrixok szorzatára!

5. Melyik oldalról kell megszorozni és milyen permutációs mátrixszal az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixot, hogy a $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixot kapjuk?

6. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_p$ feletti $n \times n$-es invertálható mátrixok számát!

7. Legyen az 5×5-ös A mátrix determinánsa 3, az 5×5-ös C mátrixé $c \neq 0$. Mi lesz a determinánsa a következő mátrixoknak?

$2A^{-1}$ $\quad$ $(2A)^{-1}$ $\quad$ $A^2A^TA^{-1}$ $\quad$ $C^{-1}AC$

8. Hány inverzió van az alábbi permutációkban?
a) $1,2,3,4$; b) $2,4,3,1$; c) $5,4,1,3,2,6$; d) $n,(n-1),\ldots,1$.
Írjuk fel az ezekhez tartozó permutációs mátrixokat és determinánsuk értékét!

9. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét három különböző módon is:
elemi sorműveletekkel, valamely sor vagy oszlop szerinti kifejtéssel és a belőle kiválasztható nem zérus értékű kígyók segítségével!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Számítsuk ki a következő mátrix determinánsának értékét!

$$\begin{bmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{bmatrix}.$$

Hogyan lehet ezt általánosítani $n \times n$-esre? (Ötlet: adjuk az összes sort az első sorhoz.)

Házi feladatok

Beadási határidő: november 19.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Legyen $\mathcal{A} := \{(1,0,-1),(1,1,1),(1,1,0)\}$, $\mathcal{B} := \{(1,1,2),(-1,0,1),(1,1,1)\}$.
a) Mutassuk meg, hogy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ az $\mathbb{R}^3$ két bázisa!
b) Írjuk fel a $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ áttérési mátrixot!
c) Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = (1,-1,1)$ egy $\mathbf{v}$ vektor koordinátavektora az $\mathcal{A}$ bázisban. Mi lesz $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$?

2. Bontsuk fel a
$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$
mátrixot elemi mátrixok szorzatára!

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix determinánsát és inverzét aldeterminánsok segítségével!
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg a 3. feladatbeli mátrix determinánsát és inverzét elemi sorműveletekkel! A determinánst számoljuk ki kígyók determinánsai összegeként is!

5. Legyenek A és B olyan 3×3-as mátrixok amelyeknek a determinánsa 7, illetve 5. Adjuk meg a $C = (3A)^{-1}B^T$ és $D = 3(A^{-1})B^2$ mátrixok determinánsát!

6. Határozzuk meg az alábbi mátrix determinánsát!
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$
Hogyan lehet ezt általánosítani $n\times n$-es mátrixra? (Az $n\times n$-es esethez segítség: vonjuk ki minden oszlopból az előzőt, hátulról előre, és használjuk a 10. feladat megoldását!)

7*. Legyen A $n\times n$-es invertálható mátrix. Mely $\mathbf{v}$ vektorokra igaz, hogy az A bármely sorához hozzáadhatjuk $\mathbf{v}$ alkalmas skalárszorosát úgy, hogy a mátrix determinánsa 0-vá váljon?