1. Adjuk meg az A mátrix LU-felbontását! (Alsó háromszögbeli elemi sorműveletekkel felső háromszög alakra hozzuk (U), és az elemi mátrixok szorzatának inverzével (L) beszorzunk. Ekkor $A = LU$.)

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert LU-felbontás segítségével, ha A az előző feladatbeli mátrix és $\mathbf{b} = (5, -1, 3, 7)^T$. (Az $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ és $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ egyenletrendszereket oldjuk meg.)

3. Adjuk meg az A mátrix PLU-felbontását, és a determinánsát ennek segítségével! (Ha LU nem működik, alkalmas permutációs mátrixszal beszorzunk, és a szorzatra végezzük el az LU-felbontást.)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4. (Vandermonde-determináns) Mutassuk meg, hogy $\det A = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

5. Adjuk meg az $x - y + z = 0$, $2x - y + 3z = 2$, $x + 2y + 4z = 6$ valós egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen megoldását, és ennek segítségével írjuk fel az összes megoldást!

6. Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ páronként merőleges nemnulla vektorok.

a) Mi a $\mathbf{v}_i$ vektorok skaláris szorzata az $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{v}_j$-vel, ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$?

b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek!

7. Keressük meg az összes olyan 2×2-es valós X mátrixot, amelyik felcserélhető az $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixszal!
(Írjuk át az $AX = XA$ mátrixegyenletet az X elemeire vonatkozó lineáris egyenletrendszerré!)

8. Számítsuk ki az $AB + 3C$ mátrixot blokkmátrixokkal számolva:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \qquad C = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right]$$

9. Mutassuk meg, hogy $M_n[\mathbb{R}]$ a szimmetrikus és antiszimmetrikus mátrixok altereinek direkt összege! Bontsuk fel az alábbi mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus (antiszimmetrikus) mátrix összegére!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

10. Legyenek A és B tetszőleges $n \times n$-es mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy az $AB - BA$ mátrix főátlójában az elemek összege (a mátrix ú.n. **nyoma**) 0.

Házi feladatok

Beadási határidő: november 26.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Minden feladat 1 pontot ér. Pontosan 6 feladat megoldását kell beadni, melyből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert LU-felbontás segítségével, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 9 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Adjuk meg az alábbi A mátrix PLU-felbontását, és számítsuk ki ennek a segítségével a determinánsát!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix determinánsát!

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Számítsuk ki az alábbi szorzatot 4×4-es mátrixok szorzataként, és a blokkmátrixos felbontás használatával is!

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{E} \in M_2[\mathbb{R}]$ egységmárix, $\mathbf{0} \in M_2[\mathbb{R}]$ nullmátrix.

5. Határozzuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszer egyetlen sortérbeli megoldását, és ennek segítségével fejezzük ki az összes megoldást! Melyik a minimális abszolút értékű megoldás?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Az előző feladat A mátrixát és $\mathbf{b}$ vektorát tekintsük $\mathbb{Z}_3$ felettinek, és adjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lináris egyenletrendszer összes megoldását $\mathbb{Z}_3^3$-ban! Melyek esnek ezek közül A sorterébe?

7*. Legyen $F = \mathbb{Z}_p$ és $W \le F^n$ k-dimenziós altér. Mutassuk meg, hogy $W^\perp$ $(n-k)$-dimenziós altér, de általában nem igaz, hogy $W \oplus W^\perp = F^n$. ($W^\perp := \{\mathbf{a} \in F^n \mid (\mathbf{a}, \mathbf{w}) = 0 \ \forall \mathbf{w} \in W\}$, ahol $(\mathbf{a}, \mathbf{w}) := \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \mathbf{w}_i$.)