1. Számítsuk ki az alábbi mátrix rangját a maximális méretű nem nulla aldetermináns meghatározásával.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert Cramer-szabály segítségével, illetve A^{-1}-gyel való beszorzással, ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3. Mutassuk meg, hogy egy $A \in M_n[\mathbb{R}]$ mátrixra pontosan akkor teljesül az $A^T A = E$ összefüggés, azaz, hogy A **ortogonális mátrix**, ha sorvektorai páronként merőleges egységvektrok.

4. Legyen $\varphi : V_F \to W_F$ lineáris leképezés $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V$ tetszőleges vektorok. Mely állítások következnek valamelyik másikból (esetleg több másikból)?
a) φ injektív
b) φ szürjektív
c) $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ generátorrendszer V-ben
d) $\varphi(\mathbf{v}_1), ..., \varphi(\mathbf{v}_n)$ generátorrendszer W-ben
e) $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ lineárisan független V-ben
f) $\varphi(\mathbf{v}_1), ..., \varphi(\mathbf{v}_n)$ lineárisan független W-ben
g) van olyan bázis, melynek képe lineárisan független W-ben.
Változik-e a következtetések rendszere, ha föltesszük, hogy $\dim V = \dim W$ véges szám.

5. Adjuk meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát a standard bázisban! Adjuk meg mindegyiknek a magterét és képterét, és ezek dimenzióját!
a) $\mathbb{R}^3$ pontjainak z tengely körüli elforgatása α szöggel.
b) $\mathbb{R}^3$ pontjainak xy síkra való tükrözése
c) $\mathbb{R}^3$ pontjainak xy síkra való vetítése
d) $\mathbb{R}^3$ pontjainak z tengely irányú 3-szoros nyújtása
e) $\mathbb{R}^3$ pontjainak z tengelyre való tükrözése
f) $\mathbb{R}^3$ pontjainak z tengelyre való vetítése

6. Az előző feladatot módosítsuk úgy, hogy a forgatás, tükrözés, vetítés tengelye a $(2, 2, 1)$ vektorral párhuzamos, origón átmenő egyenes, illetve síkja a $2x + 2y + z = 0$ egyenletű sík legyen. Alkalmazzunk báziscserét és diadikus szorzatos módszert! A báziscserénél a másik bázis legyen olyan egységvektorokból álló bázis, amelynek két eleme a $(2, 2, 1)$ és $(1, -2, 2)$ vektorokkal párhuzamos!

7. Adjuk meg a vektoriális szorzás, mint lineáris transzformáció mátrixát a standard bázisban! Mi a magtere és a képtere?

8. a) Adjunk meg egy lineáris transzformációt, amely az $\mathbb{R}^3$ standard bázisát a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorokba viszi! Írjuk fel a mátrixát a standard bázisban!
b) Adjunk meg egy lineáris transzformációt, amely az $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ független vektorait $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorokba viszi! Írjuk fel a mátrixát a standard bázisban!

9. a) Az $xy + z = 0$ felületet mibe viszi az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Forgasssuk el α szöggel a standard bázis elemeit a z tengely körül. Mi lesz az $xy + z = 0$ felület egyenlete az új bázisban?