1. *a) Hányféleképpen lehet 8 gyereket leültetni egy sorba?*
b) Hányféleképpen lehet 8 gyereket felültetni egy 8 hintából álló körhintára?
c) Hányféleképpen lehet 8 gyereket leültetni egy kerek asztal köré, ha csak az számít, hogy kinek kik a szomszédai?
d) Hányféle lehet egy n fős futóverseny első 3 helyezése?
e) Hány k elemű részhalmaza van egy n elemű halmaznak?
f) Hány részhalmaza van egy n elemű halmaznak?

Megoldás: a) $8 \cdot 7 \cdots 2 \cdot 1 = 8! = 40320$-féleképpen.

b) Itt a hinták megkülönböztethetetlenek, de számít, hogy az egyik gyerek a másik előtt vagy mögött ül. Tehát ha a névsor szerint első gyerek helyétől számoljuk az ültetést, akkor látjuk, hogy annyi lehetőség van, ahányféleképpen sorba lehet rakni a maradék 7 gyereket, azaz $7! = 5040$.

c) Ez a helyzet annyiban különbözik a b) kérdésbelitől, hogy ha veszünk egy ültetést vagy a fordítottját, az egyformának számít. Így itt csak $7!/2 = 2520$ lehetőség van.

d) Ha nem lehet holtverseny, akkor a lehetőségek száma $n(n-1)(n-2)$.
Ha lehet holtverseny, akkor úgy tekinthetjük, hogy minden versenyző kaphat egy 1., 2., 3. vagy 4. (nem érmes) díjat (csak egyfélét), de akár az összes is kaphat egyformát. Ez így nyilván 4^n lehetőség lenne, de ez nem egészen jó, mert így előfordulhatna, hogy mindenki második díjat kap, pedig akkor mindnek első díjasnak kellene lennie. Tehát a kiosztott díjak között nem lehet hézag. Szitálással számoljuk össze azokat az eseteket, amikor 1.,2.,3.,4., amikor 1.,2.,3., amikor 1.,2. és amikor csak 1. díjakat osztunk. Ha s_H-val jelöljük azon esetek számát, amikor a $H \subseteq \{1,2,3,4\}$ halmazból adunk csak díjakat, és p_H-val ezek közül azoknak a számát, amikor a H minden eleme elő is fordul a díjak között, akkor

$$\begin{aligned} p_{\{1,2,3,4\}} &= s_{\{1,2,3,4\}} - s_{\{1,2,3\}} - s_{\{1,2,4\}} - s_{\{1,3,4\}} - s_{\{2,3,4\}} + \\ &+ s_{\{1,2\}} + \ldots + s_{\{3,4\}} - s_{\{1\}} - \ldots - s_{\{4\}} \\ &= 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4 \cdot 1^n. \end{aligned}$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} p_{\{1,2,3\}} &= s_{\{1,2,3\}} - s_{\{1,2\}} - s_{\{1,3\}} - s_{\{2,3\}} + \\ &+ s_{\{1\}} + s_{\{2\}} + s_{\{3\}} \\ &= 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 1^n, \end{aligned}$$

továbbá

$$p_{\{1,2\}} = s_{\{1,2\}} - s_{\{1\}} - s_{\{2\}} = 2^n - 2 \cdot 1^n,$$

végül

$$p_{\{1\}} = 1^n.$$

Tehát összesen

$$4^n - 3 \cdot 3^n + 4 \cdot 2^n - 2 \cdot 1^n = 4^n - 3^{n+1} + 2^{n+2} - 2.$$

e) $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$

f) 2^n, mert mind az n elemről külön-külön eldönthetjük, hogy benne legyen-e a kiválasztott halmazban, vagy ne.

2. *Bizonyítsuk be a binomiális tételt:* $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Megoldás: 1. bizonyítás kombinatorikusan: az $(a+b)^n$ n-tényezős szorzat kifejtésénél a tagok mindegyike összesen n darab a és b szorzata. Ezek közül pontosan $\binom{n}{k}$ tagban lesz k darab a és $n-k$ darab b (ennyiféleképpen választhatjuk meg a k darab a helyét), így az azonos értékű tagokat összevonva az $a^k b^{n-k}$ együtthatója $\binom{n}{k}$.
2. bizonyítás teljes indukcióval: $n = 1$-re nyilván igaz. Tegyük fel, hogy valamely n-re igaz. Ekkor $(a+b)^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)(a+b) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(a^{k+1}b^{n-k} + a^k b^{n-k+1}\right) = \sum_{j=0}^{n+1}\left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right) a^j b^{n+1-j} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j}$, felhasználva az 5. feladat c) összefüggését.

3. *Bizonyítsuk be, hogy* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Megoldás: Közvetlenül adódik az 1. feladat e) és f) részének összehasonlításából. De a binomiális tételből is következik, $a = b = 1$ helyettesítéssel.

4. *Bizonyítsuk be, hogy* $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$, *ha* $n > 0$.

Megoldás: Helyettesítsük be a binomiális tételbe az $a = -1$, $b = 1$ értékeket.

5. *Bizonyítsuk be, hogy*

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

b) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$;

c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Megoldás: a) Ugyanannyiféleképpen tudunk kiválasztani egy k-elemű részhalmazt, mint annak az $(n-k)$-elemű komplementumát. De az $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ összefüggésből is nyilvánvaló.

b) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{k\cdot(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1}$.

c) Algebrailag: $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$.

Kombinatorikusan: Rögzítsünk egy elemet az n elemű halmazban, és csoportosítsuk a k-elemű részhalmazokat aszerint, hogy tartalmazzák-e ezt az elemet. Ha egy részhalmaz tartalmazza az adott elemet, ahhoz $\binom{n-1}{k-1}$-féleképpen választhatjuk ki a többit, ha nem, akkor $\binom{n-1}{k}$-féleképpen választhatjuk ki az elemeit.

6. *Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy a Pascal-háromszög n-edik sorának elemei éppen az $\binom{n-1}{k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ binomiális együtthatók.*

Megoldás: Az első sor egyetlen eleme $1 = \binom{0}{0}$. Tegyük fel, hogy az n-edik sorra igaz az állítás. Az $(n+1)$-edik sor első és utolsó eleme $1 = \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$. Az $i+1$. pedig az előző sor i. és $i+1$-edik elemének összege, ami az indukciós feltevés szerint $\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} = \binom{n}{i}$.

7. *a) n ember között k db egyforma tárgyat hányféleképp oszthatunk ki, hogy mindenki kapjon legalább egyet?*
b) n ember között k db egyforma tárgyat hányféleképp oszthatunk ki, ha nem feltétlenül kap mindenki legalább egyet?

Megoldás: a) Az a kérdés, hogy ki hányat kap a k tárgyból. Ezt leírhatjuk úgy, hogy k darab pötty közé $n-1$ darab elválasztó vonalat teszünk: az egy embernek adott tárgyak száma ekkor az első vonal előtti, két szomszédos vonal közötti, illetve az utolsó vonal utáni pöttyök száma. Mivel mindenkinek kell kapnia egyet a tárgyak közül, az $k-1$ hézagba tehetünk maximum egy-egy vonalat. Ezért a lehetőségek száma $\binom{n-1}{k-1}$.

b) Az előbbi rész "pöttyök és vonalak" megjelenítésében most a vonalakból több is kerülhet két pötty közé, vagy akár a pöttyök elé is, de itt is összesen $(n-1)$ elválasztó vonalra van szükség. Ezt felfoghatjuk úgy, hogy az olyan $(n-1)+k$ hosszúságú jelsorozatokat számoljuk meg, amelyekben pontosan k darab pötty van, tehát a pöttyök helyét éppen $\binom{n+k-1}{k}$-féleképpen választhatjuk meg.

8. *Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy*
a) $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$;
b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = n(4n^2-1)/3$;
c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.

Megoldás: a) $n = 1$-re igaz: $1 = 1^2$. Tegyük fel, hogy valamely n-re igaz, hogy $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$. Ekkor $1 + 3 + \ldots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$.

b) $n = 1$-re $1^2 = 1 \cdot (4 \cdot 1^2 - 1)/3$. Tegyük fel, hogy valamely n-re igaz az összegképlet. Ekkor $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3} + (2n+1)^2 = (2n+1)\frac{n(2n-1)+3(2n+1)}{3} =$
$\displaystyle(2n+1)\frac{2n^2+5n+3}{3} = \frac{(2n+1)(2n+3)(n+1)}{3} = \frac{(n+1)(4(n+1)^2-1)}{3}$.

c) $n = 1$-re igaz: $1^2 = 1 \cdot 2 \cdot 3/6$. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely n-re. Ekkor
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6} =$
$\displaystyle= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, tehát $(n+1)$-re is igaz az állítás.

9. *Legyen $f_0 := 0$, $f_1 := 1$, $f_2 := 1$, $\ldots$, $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$ az ú.n. Fibonacci-sorozat. Hányféleképpen fedhető le dominóval egy $2 \times n$-es sakktábla? Hozzuk kapcsolatba a Fibonacci-sorozattal!*

Megoldás: Ha a bal felső sarok egy függőlegesen álló dominóval van lefedve, akkor már csak egy $2 \times (n-1)$-es táblát kell lefedni. Ha vízszintes dominó fedi le a bal felső sarkot, akkor a bal alsót is, és ezután egy $2 \times (n-2)$-es táblát kell még tetszőlegesen lefedni. Tehát ha a $2 \times n$-es tábla lefedéseinek a száma s_n, akkor $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$, ami pont a Fibonacci-sorozat rekurziója. Mivel $s_1 = 1$ és $s_2 = 2$, teljes indukcióval bizonyíthatjuk, hogy $s_n = f_{n+1}$. (Itt az indukciónak azt a formáját használjuk, hogy az első két tagra ellenőrizzük az állítást, majd azt látjuk be, hogy ha az n-nél kisebb indexű tagokra igaz az állítás, akkor az n-edikre is.)