**1.** *Mutassuk meg, hogy minden $R$ gyűrűben:*
*a)* 1 *db nullelem van.*
*b)* $0r = r0 = 0$ *minden* $r \in R$*-re.*
*c)* $(-a)r = -(ar) = a(-r)$*, minden* $a, r \in R$*-re.*

*Megoldás:* a) Ha 0 és $0'$ is nullelemek, akkor $0' = 0' + 0 = 0$.
b) $0r = (0+0)r = 0r + 0r \Rightarrow 0 = 0r + (-0r) = (0r + 0r) + (-0r) = 0r + (0r + (-0r)) = 0r + 0 = 0r$. Ugyanígy megy az $r0 = 0$ bizonyítása.
c) $(ar) + (-a)r = (-a)r + (ar) = (-a + a)r = 0r = 0$ az összeadás kommutativitása és a b) rész miatt, így $(-a)r = -(ar)$, és hasonlóan $a(-r) = -(ar)$ is igaz.

**2.** *Mutassuk meg, hogy az $a + b\sqrt{2}$ alakú számok, ahol $a, b$ racionális, testet alkotnak.*

*Megoldás:* Hívjuk ezt a halmazt $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$-nek. Mivel $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subseteq \mathbb{R}$, csak azt kell belátni, hogy $0, 1 \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, és $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ zárt az összeadásra, szorzásra, és az additív és multiplikatív inverzre.
Valóban, $0 = 0 + 0\sqrt{2}$, $1 = 1 + 0\sqrt{2}$,
$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$,
$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$,
$-(a + b\sqrt{2}) = (-a) + (-b)\sqrt{2}$, és
$\dfrac{1}{a + b\sqrt{2}} = \dfrac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \dfrac{a}{a^2 - 2b^2} - \dfrac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, és a hányados értelmezve van, mert ha $a^2 - 2b^2 = 0$ lenne valamely $0 \neq a, b \in \mathbb{Q}$-ra, akkor $\sqrt{2}$ racionális volna.

**3.** *Adjuk meg $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényként (a szokásos algebrai műveletek és konjugálás segítségével) az $1 + 2i$-t az origóval összekötő egyenesre való tükrözést!*

*Megoldás:* Az $x$ tengelyre való tükrözés a konjugálás. Egy másik, origón átmenő egyenesre való tükrözést megkaphatunk úgy, hogy a tükrözés tengelyét beleforgatjuk az $x$ tengelybe, aztán konjugálunk, és az eredményt visszaforgatjuk. Az $1+2i$ szögével ellentétes irányú, de azonos szögű forgatást az $\frac{1}{\sqrt{5}}(1-2i)$ (1 hosszúságú, $1-2i$ irányú) számmal való szorzásként kapjuk meg, a visszaforgatást az $\frac{1}{\sqrt{5}}(1+2i)$-vel való szorzásként, így a teljes leképezés
$z \mapsto \overline{z\frac{1}{\sqrt{5}}(1-2i)}\frac{1}{\sqrt{5}}(1+2i) = \overline{z}\frac{1}{\sqrt{5}}(1+2i)\frac{1}{\sqrt{5}}(1+2i) = \overline{z} \cdot (-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)$.

**4.** *a)* $(1 + i)^n$*-et számítsuk ki algebrai és trigonometrikus alakban is! Milyen azonosságot adnak a valós részek a két kifejezésben?*
*b)* $(\cos x + i \sin x)^3$*-t számítsuk ki kétféle módon. Ennek segítségével fejezzük* $\cos(3x)$*-et* $\cos x$ *függvényében.*

*Megoldás:* a) $(1+i)^n = (i+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k$, másrészt $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4})\right)^n = 2^{n/2}(\cos\frac{n\pi}{4} + i \sin\frac{n\pi}{4})$. Az elsőnek a valós része a páros indexű tagokból áll. Ha ezt összevetjük a trigonometrikus alakkal, azt kapjuk, hogy

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots = \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \binom{n}{2m} = 2^{n/2} \cos\frac{n\pi}{4}.$$

Esetszétválasztással szebb alakra is hozhatjuk:

$$\begin{cases} 0 & \text{ha } n \equiv 2 \pmod 4 \\ 2^{n/2} & \text{ha } n \equiv 0 \pmod 8 \\ -2^{n/2} & \text{ha } n \equiv 4 \pmod 8 \\ 2^{(n-1)/2} & \text{ha } n \equiv 1,7 \pmod 8 \\ -2^{(n-1)/2} & \text{ha } n \equiv 3,5 \pmod 8 \end{cases}$$

b) A trigonometrikus alakban végzett hatványozással

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos(3x) + i \sin(3x),$$

a binomiális tétel szerint pedig

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + i3\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - i \sin^3 x.$$

A két kifejezés valós részét összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

**5.** *Adjuk meg annak a négyzetnek a másik két csúcsát, melynek két átellenes csúcsát két adott komplex szám, $z_1$ és $z_2$ alkotják!*

*Megoldás:* A négyzet középpontja $\frac{z_1+z_2}{2}$, a másik két csúcsot pedig megkaphatjuk a $z_1$-nek a középpont körüli $\pm 90°$ fokos elforgatásával. Mivel az origó körüli $90°$-os forgatás az $i = \cos 90° + i \sin 90°$ számmal való szorzás, a két csúcs:

$$\left(z_1 - \frac{z_1+z_2}{2}\right) i + \frac{z_1+z_2}{2} = z_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) + z_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right),$$

$$\left(z_1 - \frac{z_1+z_2}{2}\right)(-i) + \frac{z_1+z_2}{2} = z_1\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) + z_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right),$$

**6.** *Oldjuk meg a komplex számok halmazán a*

$$z^2 + 2iz - 1 + i = 0$$

*egyenletet!*

*Megoldás:* $z = \dfrac{-2i \pm \sqrt{-4i}}{2} = -i \pm \sqrt{-i}.$

$-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{-i} = \pm\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \pm\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$, így az egyenlet gyökei

$$z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)i,$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)i.$$

**7.** *Számítsuk ki az $1 - 2i$ komplex szám négyzetgyökeit (trigonometrikus alak használata nélkül)!*

*Megoldás:* Keressük meg azt a $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ számot, amelyre $(x + yi)^2 = 1 - 2i$, azaz $x^2 - y^2 + 2xyi = 1 - 2i$. Az algebrai alak egyértelműsége miatt ez ekvivalens az $x^2 - y^2 = 1,\ \ 2xy = -2$ egyenletrendszerrel. A második egyenletből $y = -\dfrac{1}{x}$, és ezt az elsőbe helyettesítve az

$$x^4 - x^2 - 1 = 0$$

egyenletet kapjuk. Ebből $x^2 = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, de $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$, tehát csak az $x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ megoldás jó, amiből

$$x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ és } y = -\frac{1}{x} \ \Rightarrow\ z = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right).$$

**8.** *A* $-\sqrt{3} + i$ *és az* $1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha$ *komplex számokat hozzuk trigonometrikus alakra!*

*Megoldás:* $z = -\sqrt{3} + i$-re $|z| = 2$, és így $z = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2(\cos 150° + i \sin 150°)$ vagy radiánban $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

$z = 1 - i\,\mathrm{tg}\,\alpha$ abszolút értéke $\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha} = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}} = \dfrac{1}{|\cos\alpha|}$

Ha $\cos\alpha > 0$, akkor

$z = \dfrac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \dfrac{1}{\cos\alpha}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))$ (az utóbbi a trigonometrikus alak),

ha $\cos\alpha < 0$, akkor

$z = \dfrac{1}{-\cos\alpha}(-\cos\alpha + i\sin\alpha) = \dfrac{1}{-\cos\alpha}(\cos(\pi - \alpha) + i\sin(\pi - \alpha))$.

**9.** *Adjuk meg a primitív* 5*-ödik és a primitív* 8*-adik egységgyökök összegét és szorzatát!*

*Megoldás:* A primitív ötödik egységguökök $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$, ahol $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. Így az összegük $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4) - 1 = -1$, mert tudjuk, hogy minden $n > 1$-re az $n$-edik egységgyökök összege 0. A szorzatuk $\varepsilon^{1+2+3+4} = \varepsilon^{10} = 1$.

A nyolcadik primitív egységgyökök $\varepsilon, \varepsilon^3, \varepsilon^5, \varepsilon^7$, ahol $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$. Az összegük $\varepsilon(1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^6) = 0$, mert $1, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^6$ éppen a 4-edik egységgyökök, a szorzatuk pedig $\varepsilon^{1+3+5+7} = \varepsilon^{16} = 1$.

**10.** *Számítsuk ki a* $\bar{z} = z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ *egyenlet összes megoldását!*

*Megoldás:* Legyen $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ a $z$ trigonometrikus alakja. Ekkor az egyenlet

$$r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Ebből $r = r^n \Rightarrow r(1 - r^{n-1}) = 0 \Rightarrow r = 0$ vagy 1 (mivel $r \geq 0$ valós). Az első esetben $z = 0$. A másodikban a szögekre igaz, hogy $n\varphi = -\varphi + 2k\pi$, azaz $\varphi = \frac{k}{n+1}2\pi$ valamely $k \in \mathbb{Z}$-re, tehát $z$ az $n + 1$ darab $(n + 1)$-edik egységgyök egyike.