Bevezetés az algebrába 1 **6. gyakorlat** *2018. október 8.*

1. *Osszuk el maradékosan az $x^4 - 2x + 5$ polinomot*
a) $x^2 - x + 2$*-vel,*
b) $x + 1$*-gyel,*
c) $(x+1)^2$*-nel!*

Megoldás: a)

$$\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 & & & -2x & +5) & : (x^2-x+2) \; = x^2+x-1\\
-(x^4 & -x^3 & +2x^2) & & & \\
\cline{1-5}
& x^3 & -2x^2 & -2x & +5 & \\
& -(x^3 & -x^2 & +2x) & & \\
\cline{2-5}
& & -x^2 & -4x & +5 & \\
& & -(-x^2 & +x & -2) & \\
\cline{3-5}
& & & -5x & +7 &
\end{array}$$

Tehát $x^4 - 2x + 5 = (x^2 - x + 2)(x^2 + x - 1) + (-5x + 7)$.

b) Horner-módszerrel:

	1	0	0	−2	5
−1	1	−1	1	−3	8

Tehát $x^4 - 2x + 5 = (x + 1)(x^3 - x^2 + x - 3) + 8$.

c) A b) részben kiszámolt hányadost még egyszer eloszthatjuk $(x + 1)$-gyel a Horner-módszer segítségével: $x^3 - x^2 + x - 3 = (x+1)(x^2 - 2x + 3) - 6$, és ezt behelyettesítve a negyedfokú polinom felírásába:
$x^4 - 2x + 5 = (x+1)((x+1)(x^2 - 2x + 3) - 6) + 8 = (x+1)^2(x^2 - 2x + 3) - (x+1)6 + 8 = (x+1)^2(x^2 - 2x + 3) + (-6x + 2)$.

2. *Horner-séma segítségével írjuk fel az $x^3 + 2x^2 + 1$ polinomot $(x - 3)$ hatványai szerint rendezve!*

Megoldás: Addig osztjuk maradékosan $(x - 3)$-mal az előző osztás maradékát, amíg a hányados konstans nem lesz. Ekkor ez a konstans hányados és a maradékok fordított sorrendben éppen az $(x - 3)$ hatványainak az együtthatóit adják.

	1	2	0	1
3	1	5	15	**46**
3	1	8	**39**	
3	**1**	**11**		

Tehát $x^3 + 2x^2 + 1 = (x - 3)^3 + 11(x - 3)^2 + 39(x - 3) + 46$.

3. *Határozzuk meg $x^3 - 2x^2 + x - 1$ és $x^2 + 2$ legnagyobb közös osztóját euklideszi algoritmussal és állitsuk elő a legnagyobb közös osztót ezen polinomok polinomegyütthatós lineáris kombinációjaként! (Kibővített euklideszi algoritmus)*

Megoldás: Az $x^3-2x^2+x-1=(x^2+2)(x-2)+(-x+3)$ és $x^2+2=(-x+3)(-x-3)+11$ maradékos osztásokat követve:

	x^3-2x^2+x-1	x^2+2
x^3-2x^2+x-1	1	0
x^2+2	0	1
$-x+3$	1	$-x+2$
11	$x+3$	$-x^2-x+7$

Tehát $11=(x+3)(x^3-2x^2+x-1)+(-x^2-x+7)(x^2+2)$, azaz
$1=\frac{1}{11}(x+3)(x^3-2x^2+x-1)+\frac{1}{11}(-x^2-x+7)(x^2+2)$.

4. *Határozzuk meg az alábbi polinomok gyökeit. Bontsuk fel őket irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben:*
a) $x^6-2x^5-x^4+4x^3-5x^2+6x-3$
b) x^5+1

Megoldás: a) A racionális gyökteszt szerint az $f(x)=x^6-2x^5-x^4+4x^3-5x^2+6x-3$ polinomnak racionális gyöke csak ±1 vagy ±3 lehet. Könnyen látható, hogy 1 valóban gyök. Emeljük ki $(x-1)$-et Horner-módszerrel! A hányadosnak is gyöke az 1, ezért tovább osztjuk.

	1	−2	−1	4	−5	6	−3
1	1	−1	−2	2	−3	3	0
1	1	0	−2	0	−3	0	

$f(x)=(x-1)^2(x^4-2x^2-3)=(x-1)^2(x^2-3)(x^2+1)=(x-1)^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1)$
az $\mathbb{R}$ fölötti felbontás, mert x^2+1 irreducibilis (másodfokú, és nincs valós gyöke).
$\mathbb{C}$ fölött tovább bontható: $f(x)=(x-1)^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-i)(x+i)$.

b) $x^5=-1=\cos\pi+i\sin\pi \Leftrightarrow x=\cos\left(\frac{\pi}{5}+k\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}+k\frac{2\pi}{5}\right)$ $(k=0,1,2,3,4)$.
A komplex gyöktényezős felbontásból megkapjuk a valósat a konjugált tényezők párosításával:
$x^5+1=(x-(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}))(x-(\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5}))(x-(\cos\pi+i\sin\pi))\cdot$
$\cdot(x-(\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}))(x-(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}))=$
$(x+1)\left(x^2-2\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)x+1\right)\left(x^2-2\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right)x+1\right)$.

5. *Adjuk meg $\mathbb{Z}_2$ felett az irreducibilis másodfokú polinomokat! Irreducibilisek-e ezek $\mathbb{Z}$ felett is?*

Megoldás: $\mathbb{Z}_2$ fölött összesen négy másodfokú polinom van. Ha irreducibilis, akkor a konstans tag nem lehet 0, és az együtthatók összege sem 0, hogy a 0 és az 1 ne legyen gyöke. Az egyetlen lehetőség az x^2+x+1, és ez valóban irreducibilis, mert másodfokú, és nincs gyöke.
Általában is igaz, hogy ha egy egész együtthatós primitív polinom irreducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött egy olyan p prímre, amely nem osztója a főegyütthatójának, akkor $\mathbb{Z}$ fölött is irreducibilis, ugyanis minden valódi felbontása $\mathbb{Z}$ fölött $\mathbb{Z}_p$ fölött is valódi felbontást adna.

6. *Adjuk meg azt a legalacsonyabbfokú egyfőegyütthatós*
a) komplex együtthatós
b) valós együtthatós polinomot, amelynek i *kétszeres,* 1 *háromszoros gyöke!*

Megoldás: a) $(x-i)^2(x-1)^3$

b) Ha i kétszeres gyöke egy valós polinomnak, akkor $-i$ is az, tehát a polinom legalább hetedfokú, és az $(x-i)^2(x+i)^2(x-1)^3 = (x^2+1)^2(x-1)^3$ valóban ilyen polinom.

7. *Határozzuk meg az* $(x-2)^2(x+i)^5(x-3)(x-4)^2$ *és az* $(x-2)(x+i)^2(x-3)^3$ *polinom legnagyobb közös osztóját!*

Megoldás: $(x-2)(x+i)^2(x-3)$.

8. *Mutassuk meg, hogy páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke!*

Megoldás: Mivel a páratlan fokú polinom mint valós függvény $-\infty$-ben $-\infty$-hez tart, $+\infty$-ben pedig $+\infty$-hez, a függvény negatív és pozitív értéket is felvesz, és így a Bolzano-tétel miatt a 0-t is felveszi.

Az algebra alaptételéből is következik az állítás, mert a nem valós gyökök és a konjugáltjuk ugyanolyan multiplicitású gyökei a polinomnak, és multiplicitással együtt páratlan sok gyöke van, tehát kell lennie valós gyöknek is.

9. *Határozzuk meg az* a *együtthatót úgy, hogy* -1 *legalább kétszeres gyöke legyen az*

$$x^5 - ax^2 - ax + 1$$

polinomnak!

Megoldás: $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$-nek gyöke a -1: $f(-1) = -1 - a + a + 1 = 0$. Emeljük ki $(x+1)$-et!

	1	0	0	$-a$	$-a$	1
-1	1	-1	1	$-1-a$	1	0

$f(x) = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - (1+a)x + 1)$. Akkor lesz hányadosnak is gyöke a -1, ha $1+1+1+1+a+1 = 0$, azaz $a = -5$.

10. *Adjuk meg az alábbi polinomok komplex gyöktényezős alakját! Irreducibilisek-e* $\mathbb{R}$ *felett?*
a) $x^3 - 1$
b) $x^n + 1$
c) $x^2 + x + 1$

Megoldás: a) $x^3 - 1 = (x-1)\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$.

Nem irreducibilis $\mathbb{R}$ fölött, mert gyöke az 1.

b) $x^n + 1 = \dfrac{x^{2n}-1}{x^n-1}$, tehát x^n+1 gyökei azok a $2n$-edik egységgyökök, amelyek nem n-edik egységgyökök. Ha ε primitív $2n$-edik egységgyök, akkor $x^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(x - \varepsilon^{2k+1})$.

Nem irreducibilis $n > 2$ esetén, mert $\mathbb{R}[x]$-ben csak első és másodfokú irreducibilis polinomok vannak, viszont $x+1$ és x^2+1 irreducibilis. $\mathbb{R}[x]$-ben.

c) $x^2 + x + 1 = \dfrac{x^3-1}{x-1} = \left(x - \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$ az a) rész szerint.

Irreducibilis $\mathbb{R}[x]$-ben, mert másodfokú, és nincs valós gyöke.