1. *Az alábbi mátrixok közül melyek vannak lépcsős, illetve redukált lépcsős alakban? A redukált lépcsőseknél írjuk fel a mátrixhoz tartozó lineáris egyenletrendszer megoldását vektoros alakban is!*

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ *b)* $\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ *c)* $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ *e)* $\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Megoldás: a) Lépcsős, de nem redukált lépcsős, mert az első sor vezéreleme nem 1.

b) Redukált lépcsős alak. A megoldása

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1, \quad \text{vagy vektorosan} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

c) Nem lépcsős: a harmadik sor vezéreleme nincs jobbra a másodikénál.

d) Redukált lépcsős alak. Kötött változói x_1, x_3, szabad változói x_2, x_4. A szabad változóknak tetszőleges értékeket adhatunk: $x_2 = s$, $x_4 = t$ $(s, t \in \mathbb{R})$, és ebből a megoldás: $x_1 = 1 - 2t$, $x_2 = s$, $x_3 = 2 - 3t$, $x_4 = t$, vagy vektorosan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ s \\ 2-3t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

d) Lépcsős alak, de nem redukált, mert a második sor vezéregyese fölött van nem nulla elem.

2. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:*

a)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ -x + y - z &= 2 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ 4x + 4y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 7x + 14y - 21z &= 7 \\ x + 2y - 3z &= 1 \\ 5x + 10y + 15z &= 5 \\ 3x + 6y - 9z &= 3 \end{aligned}$$

c) Mit jelent az egyenletrendszerek megoldása a sormodellben?

d) Mit jelent az oszlopmodellben?

e) Ki tudunk-e választani az eredeti egyenletek közül kevesebbet, melyek ugyanezt a megoldást adják? Melyeket?

Megoldás: a)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right].$$

Bár ez még nem lépcsős alak, ebből is látszik, hogy a negyedik sor ellentmondásos, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása.

b)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 7 & 14 & -21 & 7 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 10 & 15 & 5 \\ 3 & 6 & -9 & 3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Itt y szabad változó, és a megoldás:

$$\begin{array}{l} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{array}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

c) Az első egyenletrendszer megoldása azt mutatja, hogy az egyenletek által megadott négy síknak nincs közös pontja, a második egyenletrendszerben szereplő négy sík (valójában csak két különböző sík többféleképpen felírva) metszete a megoldásban megadott egyenes.

d) Az első egyenletrendszer megoldásából kiderül, hogy a $(4, 2, 1, 1)$ vektort nem lehet előállítani az $(1, -1, 2, 4)$, $(1, 1, 1, 4)$ és $(1, -1, 2, 4)$ vektorok lineáris kombinációjaként. A másodikban viszont a $(7, 1, 5, 3)$ vektort végtelen sokféleképpen fel tudjuk írni a $(7, 1, 5, 3)$, $(14, 2, 10, 6)$ és $(-21, -3, 15, -9)$ vektorok lineáris kombinációjaként. Az együtthatókat az egyenletrendszer x, y, z ismeretlenei adják meg.

e) Igen, az elsőnél már az első és a negyedik sor is ellentmond egymásnak (a sormodellben ez két párhuzamos sík), a másodikban a második és a harmadik egyenletből is ugyanezt a megoldást kapjuk (az első és a negyedik sík ugyanaz, mint a második).

3. *Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek:*

a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és egyértelmű a megoldása;

b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;

c) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és nincs megoldása;

d) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van és pontosan 5 megoldása van (van-e ilyen valós, illetve véges test feletti egyenletrendszer)?

Megoldás: a) Nincs, ha van megoldás, akkor van szabad változó is, ugyanis az öt sorban legfeljebb öt vezérelem lehet, nem jut minden oszlopba.

b) Igen, pl. lehet $x_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, és $x_1 + x_2 = 0$.

c) Igen, akár az egyik egyenlet önmagában is lehet ellentmondásos (csupa nulla együttható, és nem nulla konstans).

d) Valós egyenletrendszer nem lehet ilyen, mert ha egynél több megoldása van, akkor van szabad változója, és az végtelen sok értéket vehet föl. Viszont $\mathbb{Z}_5$ fölött lehet ilyen egyenletrendszer, például $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$, $x_4 - x_5 = 0$ megoldásai $(0, 0, 0, t, t)$, ahol $t \in \mathbb{Z}_5$ tetszőleges.

4. *Az a és b paraméterek értékétől függően hány megoldása van a következő mátrixhoz tartozó valós egyenletrendszernek? Oldjuk meg a feladatot $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött is!*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 2 & -a & | & b \\ 1 & 3 & a & | & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 2 & -a & | & b \\ 1 & 3 & a & | & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -a & | & b-1 \\ 0 & 2 & a & | & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -a & | & b-1 \\ 0 & 0 & 3a & | & 1-2b \end{bmatrix}$$

Ez lépcsős alak, és ha $a \neq 0$, akkor nincs ellentmondásos sor, és minden oszlopban van vezérelem, tehát 1 megoldás van;
ha $a = 0$ és $1 - 2b = 0$, azaz ha $a = 0$ és $b = \frac{1}{2}$, akkor nincs ellentmondásos sor, de van szabad változó, ezért végtelen sok megoldás van,
végül ha $a = 0$ és $b \neq \frac{1}{2}$, akkor nincs megoldás.
A sorredukció ugyanez $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött is, mert nem osztottunk sem 2-vel, sem 3-mal.
$\mathbb{Z}_2$ fölött a lépcsős alak harmadik konstansa nem nulla, így csak 1 megoldás lehet akkor, ha $a \neq 0$, és nincs megoldás, ha $a = 0$.
$\mathbb{Z}_3$ fölött $3a = 0$, tehát ha $2b \neq 1$, azaz ha $b \neq -1$, akkor nincs megoldás, ha viszont $b = -1$, akkor van megoldás és egy szabad változó van, ami $\mathbb{Z}_3$ tetszőleges elemét veheti föl értékként (0, 1, 2-t), így ekkor három megoldás van.

5. *Határozzuk meg az $x + 3y + z = 2$ és $x + 2y + 2z = 5$ egyenletű síkok metszetét! Ha a metszet egyenes, adjuk meg az egyenes explicit egyenletét vektorosan és koordinátánként is!*
Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

A megoldás az $x = 11 - 4t,\ \ y = -3 + t,\ \ z = t\ \ (t \in \mathbb{R})$ egyenes, vagy vektorosan

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(Az utóbbiból leolvasható, hogy az egyenes átmegy a $(11, -3, 0)$ ponton, és párhuzamos a $(-4, 1, 1)$ vektorral.)

6. *Adjuk meg a $2x - y + z = 1$ sík explicit egyenletét, illetve egyenletrendszerét: oldjuk meg az egyenletet, mint egy egy egyenletből álló egyenletrendszert, és írjuk fel a megoldást vektorosan is!*
Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right],$$

redukált lépcsős alak. Két szabad változó van, legyen $y = s$ és $z = t$ tetszőleges, ekkor $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t$. Tehát a sík explicit egyenletrendszere, illetve explicit vektoros egyenlete:

$$\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t \\ y = s \\ z = t \end{array}, \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(Természetesen ez csak egy a sík lehetséges explicit egyenletei közül, a sík bármely pontját és bármely két a síkkal párhuzamos egymástól független vektort választhatnánk a vektoros egyenletben szereplő három vektornak, és így az egyenletrendszer is más lenne.)

7. *Legyen $\mathbf{a} = (1, 0, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 2, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$. Lássuk be, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan függetlenek. A $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 0)$ és $\mathbf{w} = (1, 1, 1, 1)$ vektorok közül azt amelyiket lehet, állítsuk elő az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként!*

Megoldás: A vektorok függetlenek, ha az $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0}$ egyenletnek csak egyetlen (az $x = y = z = 0$) megoldása van, azaz ha a vektorokból mint oszlopokból álló mátrix lépcsős alakjában minden oszlopban van vezérelem. Mivel a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorok előállításánál is ugyanazt a mátrixot redukáljuk, egy redukcióval megoldhatjuk mindhárom feladatot.

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Ebből látható, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ függetlenek, és a $\mathbf{v}$, illetve $\mathbf{w}$ előállításához tartozó konstans oszlopokkal a redukció után a következő kibővített mátrixokat kapnánk.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{és} \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right].$$

Tehát $\mathbf{v} = -\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$, viszont $\mathbf{w}$ nem állítható elő $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként.

8. *Mutassuk meg, hogy vektorteret alkotnak az alábbiak. Határozzuk meg e vektorterek dimenzióját. Adjunk meg bennük bázist is.*

a) $V = \mathbb{C}$, $F = \mathbb{R}$ *b)* $V = M_n[\mathbb{R}]$, $F = \mathbb{R}$ *c)* $V = F[x]$, F *test felett*

d) Mutassuk meg, hogy a valós $n\times n$*-es szimmetrikus mátrixok (azaz amelyek megegyeznek a transzponáltjukkal) alterét alkotják* $M_n[\mathbb{R}]$*-nek. Adjuk meg ennek is a dimenzióját és egy bázisát.*

Megoldás: a) A komplex számtest műveleti tulajdonságaiból következik, hogy $\mathbb{C}$ a vektortér-axiómákat is kielégíti az $\mathbb{R}$ test fölött. Az $\{1, i\}$ halmaz bázisa $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$-nek, ugyanis minden komplex szám egyértelműen írható $a \cdot 1 + b \cdot i$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Tehát $\dim \mathbb{C}_{\mathbb{R}} = 2$.

b) Az $n \times n$-es valós mátrixokon értelmezve van az összeadás és a valós számmal való (elemenkénti) szorzás, és ezek kielégítik a vektortér-axiómákat. Bázist alkotnak benne az E_{ij} ($1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$) mátrixok, azaz amelyeknek egyetlen nem nulla eleme az i. sor j. helyén álló 1: minden $A = [a_{ij}]$ mátrix előáll $\sum\limits_{i,j} a_{ij}E_{ij}$ alakban, és ez az előállítás egyértelmű, mert a kapott mátrix elemeiből leolvashatjuk az együtthatókat. Így $\dim M_n(\mathbb{R})_{\mathbb{R}} = n^2$.

c) Polinomok összege és konstansszorosa is polinom, és teljesülnek az előírt műveleti tulajdonságok is. $F[x]$-ben bázist alkotnak az 1, x, x^2, $x^3, \ldots$ polinomok: minden polinom egyértelműen írható ezek lineáris kombinációjaként. Mivel ez a bázis végtelen sok elemet tartalmaz, $F[x]$ végtelen dimenziós F fölött.

d) A szimmetrikus mátrixok halmaza nyilván nem üres (pl. a nullmátrix benne van), és ha $A^T = A$ és $B^T = B$, akkor $(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$, $(cA)^T = cA^T = cA$, tehát ez a halmaz zárt a vektortérműveletekre is, ezért altér $M_n(\mathbb{R})$-ben. Legyen $i \le j$-re S_{ij} az a mátrix, amelynek minden eleme nulla, kivéve az (i, j) és (j, i) pozícióban álló 1-et. Ezek szimmetrikus mátrixok, és minden szimmetrikus mátrix előáll ezek lineáris kombinációjaként: ha $A = [a_{ij}]$ szimmetrikus, akkor $B = \sum\limits_{i\le j} a_{ij}S_{ij}$-re $b_{ij} = b_{ji} = a_{ij}$, ha $i < j$, és $b_{ii} = a_{ii}$. De $A^T = A$ miatt $a_{ji} = a_{ij}$ minden i, j-re, ezért $B = A$. Másrészt ha $\sum\limits_{i\le j} c_{ij}S_{ij} = 0$ valamely $c_{ij} \in \mathbb{R}$-re, akkor $\sum\limits_{i\le j} c_{ij}E_{ij} + \sum\limits_{i<j} c_{ij}E_{ji} = 0$, amiből $\forall i, j:\ c_{ij} = 0$, mivel az E_{ij}-k függetlenek. Tehát az S_{ij} mátrixok független generátorrendszert, azaz bázist alkotnak, és a számuk $n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$, így ez a szimmetrikus mátrixok alterének dimenziója.