1. *Függetlenek-e az $(1,2,-1,0)$, $(1,1,2,1)$, $(2,0,1,3)$ és az $(1,0,-4,1)$ vektorok? Ha nem, akkor adjuk meg közülük az általuk generált altér egy bázisát és fejezzük ki segítségükkel a többi vektort. Írjuk fel mindegyik vektor koordinátavektorát e bázisra nézve! A feladatot ezen oszlopokból álló mátrix redukált lépcsős alakra hozásával oldjuk meg.*

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mivel a redukált lépcsős alak oszlopterének bázisa az első három oszlop ($\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$), az eredeti mátrix oszlopterében is bázist alkot a mátrix első három oszlopa: $\mathcal{B} = \{(1,2,-1,0),(1,1,2,1),(2,0,1,3)\}$. A negyedik oszlop a redukált lépcsős alakban $1\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3$, ezért az eredeti mátrix negyedik oszlopát is ugyanezekkel az együtthatókkal kapjuk meg az első három oszlopból: $(1,0,-4,1) = (1,2,-1,0) - 2(1,1,2,1) + (2,0,1,3)$. A vektorok koordinátavektorai a $\mathcal{B}$ bázisban az előállítás együtthatóiból állnak (a redukált lépcsős alak nem nulla soraiból álló mátrix megfelelő oszlopai, ha a bázist úgy választottuk ki, hogy a vezéregyeseket tartalmazó oszlopoknak megfelelő oszlopok legyenek az eredeti mátrixban):

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. *Állítsuk elő a $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,1,-1,3)$ és $\mathbf{v}_3 = (0,1,-2,-1)$ vektorok lineáris kombinációjaként az $\mathbf{a} = (0,-1,3,-1)$, $\mathbf{b} = (1,1,0,1)$ és $\mathbf{c} = (3,2,-2,3)$ vektorok közül azokat, amelyeket lehet! (Használjunk szimultán egyenletrendszert!)*

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Ezt szétbontva a három ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ konstans vektorú) egyenletrendszer mátrixának redukált lépcsős alakjává:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

azt látjuk, hogy $\mathbf{b}$ nem állítható elő $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ lineáris kombinációjaként, de $\mathbf{a} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ és $\mathbf{c} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

3. *a) Hozzuk redukált lépcsős alakra az alábbi A mátrixot!*
b) Álljon a B mátrix az A azon oszlopaiból, amelyek a redukált lépcsős alak vezéregyest tartalmazó oszlopainak felelnek meg (bázisoszlopok), és legyenek az R mátrix sorai az A redukált lépcsős alakjának nem nulla sorai (mindkét esetben megtartva a sorrendet is). Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A = BR$ Ezt nevezik az A mátrix **bázisfelbontásának***.*
c) A bázisfelbontás segítségével bontsuk A-t 1-rangú márixok összegére, úgynevezett **diádokra***: $A = \sum_{i=1}^{r} \mathbf{o}_i\mathbf{s}_i$, ahol $\mathbf{o}_i$-k a B oszlopai és $\mathbf{s}_i$-k az R sorai.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A redukált lépcsős alak két vezéregyese az első két oszlopban van, tehát ha az A mátrix első két oszlopából állítjuk össze az oszloptér $\mathcal{B}$ bázisát (és a bázisfelbontás B mátrixát), akkor a redukált lépcsős alak nemnulla soraiból álló R mátrix oszlopai az A oszlopainak $\mathcal{B}$ szerinti koordinátavektorai, és így

$$A = BR, \text{ ahol} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ebből a diádokra bontás:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

4. *Tekintsük a $\mathcal{B} = \{(1,3,-1),\ (0,1,1),\ (2,-1,0)\}$ bázist $\mathbb{R}^3$-ben. Melyik az a $\mathbf{v}$ vektor, amelynek $\mathcal{B}$ szerinti koordinátavektora $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (1,2,-1)$, és mi a $\mathbf{w} = (3,0,-3)$ vektor koordinátavektora $\mathcal{B}$ szerint? Adjuk meg a standard bázis és $\mathcal{B}$ bázis közötti átmeneti mátrixot.*

Megoldás: Legyenek $\mathcal{B}$ elemei $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ és $\mathbf{b}_3$. Ekkor $\mathbf{v} = 1 \cdot \mathbf{b}_1 + 2 \cdot \mathbf{b}_2 - 1 \cdot \mathbf{b}_3 = (-1,6,1)$. Ha $\mathbf{w}$ koordinátavektorát keressük, akkor az $x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 = \mathbf{w}$ egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Tehát $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = (1, -2, 1)$.
Az áttérés mátrixa

$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. *Bizonyítsuk be, hogy*

a) ha A, B azonos alakú F test feletti mátrixok, akkor $r(A+B) \le r(A) + r(B)$;
b) ha A, B összeszorozható mátrixok, akkor $r(AB) \le r(A)$ és $r(AB) \le r(B)$;
c) egy mátrix rangja megegyezik a minimális számú diádra való felbontásában a diádok számával.

Megoldás: Először bebizonyítunk egy lemmát.
Lemma: Ha $A \in F^{m\times n}$, akkor $r(A)$ a legkisebb olyan r szám, amelyre A felbontható egy $m \times r$-es és egy $r \times n$-es mátrix szorzatára.
Biz.: Ha $r = r(A)$, akkor a bázisfelbontás ilyen tulajdonságú.
Másrészt ha van ilyen felbontás: $A = BC$, akkor a $BX = A$ szimultán egyenletrendszer megoldható $\Rightarrow$ $[B|A]$ redukált lépcsős alakjában pontosan $r(B)$ darab nem nulla sor van, és így A redukált lépcsős alakjában is legföljebb ennyi (a $[B|A]$ redukálása során A-ból kapott mátrixot tovább redukálhatjuk) $\Rightarrow r(A) \le r(B) \le r$.

a) Legyen C az a mátrix, amelyet A és B bázisoszlopaiból rakunk össze (tehát C-nek $r(A) + r(B)$ oszlopa van). Ezek lineáris kombinációiként előállíthatók A és B oszlopai, így $A + B$ oszlopait is megkapjuk C oszlopainak lineáris kombinációiként, azaz megoldható a $CX = A + B$ szimultán egyenletrendszer. $\overset{Lemma}{\Longrightarrow} r(A+B) \le$ C oszlopainak a száma $= r(A) + r(B)$.

b) Ha A bázisfelbontása $A = A_1A_2 \Rightarrow AB = A_1(A_2B)$, ahol A_1-nek $r(A)$ oszlopa van $\overset{Lemma}{\Longrightarrow} r(AB) \le r(A)$.
Ha B bázisfelbontása $B_1B_2 \Rightarrow AB = (AB_1)B_2$, ahol B_2-nek $r(B)$ sora van $\overset{Lemma}{\Longrightarrow}$ $r(AB) \le r(B)$.

c) A diádok rangja ≤ 1, tehát ha A minimum r diád összege, akkor a) miatt $r(A) \le r$. Másrészt a bázisfelbontás segítségével az A felbontható $r(A)$ darab diád összegére, így $r \le r(A)$.

6. *Az alábbi részhalmazok valamelyike alteret vagy altér eltoltját alkotja-e $\mathbb{R}^3$-ben? Amelyik altér, annak adjuk meg egy bázisát is!*

a) $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{v}| = 1\}$ *b)* $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 0\}$ *c)* $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 1\}$

Megoldás: a) Nem altér, mert $\mathbf{0}$ nincs benne, de eltolt altér sem lehet, ugyanis egy nem egyelemű eltolt altér nem lehet korlátos: $\mathbf{0} \ne \mathbf{u} \in U \le \mathbb{R}^3$ és $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^3$ esetén $\mathbf{v}_0 + t\mathbf{u} \in \mathbf{v}_0 + U$ minden $t \in \mathbb{R}$-re, és ha u_i az $\mathbf{u}$ valamelyik nem nulla komponense, akkor $\lim\limits_{t\to\infty} |v_{0i} + tu_i| = \infty$, tehát $\lim\limits_{t\to\infty} |\mathbf{v}_0 + t\mathbf{u}| = \infty$.

b) Altér: benne van a $\mathbf{0}$ vektor, és ha (x, y, z) és (x', y', z') kielégíti az egyenletet, akkor az összegük és skalárszorosuk is kielégíti.

c) Nem altér, mert $\mathbf{0}$ nincs benne, viszont a b)-beli altérnek az $(1, 0, 0)$ vektorral való eltoltja: $(x', y', z') = (x, y, z) + (1, 0, 0)$ akkor és csak akkor elégíti ki az $x' + 2y' + z' = 1$ egyenletet, ha (x, y, z) kielégíti az $x + 2y + z = 0$ egyenletet.

7. *Adjuk meg az alábbi A mátrix rangját, és kitüntetett altereinek ($S(A)$, $N(A)$, $O(A)$, $N(A^T)$) egy-egy bázisát!* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Megoldás:

$$\begin{bmatrix}1&2&3&-4\\1&-2&-1&0\\0&1&1&-1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&2&3&-4\\0&-4&-4&4\\0&1&1&-1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&0&1&-2\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$S(A)$-nak bázisát adják valamely lépcsős alak nem nulla sorai $\{(1,0,1,-2),\ (0,1,1,-1)\}$.
$O(A)$-nak bázisát adják az A azon oszlopai (A „bázisoszlopai”), amelynek megfelelő oszlopok a redukált lépcsős alakban tartalmaznak vezéregyest: $\{(1,1,0),(2,-2,1)\}$.
$N(A)$ bázisa az $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer vektoros megoldásában a paraméterek vektoregyütthatói. A megoldás

$$\begin{aligned}x_1&=-s+2t\\x_2&=-s+t\\x_3&=s\\x_4&=t\end{aligned},\quad\text{vagyis}\quad \mathbf{x}=s\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\1\\0\\1\end{bmatrix},$$

így $N(A)$ bázisa $\{(-1,-1,1,0),\ (2,1,0,1)\}$.
Hasonlóan az $N(A^T)$ altér az $A^T\mathbf{x}=\mathbf{0}$ megoldástere:

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\2&-2&1\\3&-1&1\\-4&0&-1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-4&1\\0&-4&1\\0&4&-1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&0&\frac14\\0&1&-\frac14\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\ \mathbf{x}=t\begin{bmatrix}-\frac14\\\frac14\\1\end{bmatrix}.$$

Így $N(A^T)$ bázisa $\{(-\frac14,\frac14,1)\}$, vagy egy skalárszorosa, $\{(-1,1,4)\}$.

8. *a) Bizonyítsuk be, hogy két altér metszete mindig altér, de két altér uniója pontosan akkor altér, ha a kettő közül valamelyik tartalmazza a másikat!*
b) Mutassuk meg, hogy ha W_1,W_2 egy V_F vektortér két altere, akkor a legszűkebb altér, ami őket tartalmazza $W_1+W_2:=\{\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\mid \mathbf{w}_1\in W_1,\mathbf{w}_2\in W_2\}$ (alterek összege, vagy generátuma), és $\dim(W_1+W_2)=\dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1\cap W_2)$.

Megoldás: a) Legyen $W_1,W_2\le V_F$. Ekkor $\mathbf{0}\in W_1\cap W_2$, és ha $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W_1\cap W_2\Rightarrow \mathbf{u},\mathbf{v}\in W_i$ $(i=1,2)\Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v},\ \lambda\mathbf{u}\in W_i$ $(i=1,2,\ \lambda\in F)\Rightarrow \mathbf{u}+\mathbf{v},\ \lambda\mathbf{u}\in W_1\cap W_2$ $(\lambda\in F)$. Így $W_1\cap W_2\le V$.
Viszont ha $W_1\not\subseteq W_2$ és $W_2\not\subseteq W_1$, akkor legyen $\mathbf{w}_1\in W_1\setminus W_2$ és $\mathbf{w}_2\in W_2\setminus W_1$. Így $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\in W_1\cup W_2$, de $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\notin W_1$, mert ha $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2=\mathbf{w}_1'\in W_1$ lenne, akkor $\mathbf{w}_2=\mathbf{w}_1'-\mathbf{w}_1\in W_1$ ellentmondás, és ugyanígy $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\notin W_2$, tehát $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\notin W_1\cup W_2$. Ez azt mutatja, hogy $W_1\cup W_2$ nem altér, ha W_1 és W_2 egyike sem tartalmazza a másikat. Ha viszont az egyik tartalmazza a másikat, akkor az unió a kettő közül a nagyobbik altér, tehát altere V-nek.

b) W_1+W_2 altér, mert $\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}\in W_1+W_2$, és $(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2)+(\mathbf{w}_1'+\mathbf{w}_2')=(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_1')+(\mathbf{w}_2+\mathbf{w}_2')\in W_1+W_2$, továbbá $\lambda\in F$-re $\lambda(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2)=\lambda\mathbf{w}_1+\lambda\mathbf{w}_2\in W_1+W_2$. Mivel W_1+W_2 nyilvánvalóan benne van minden olyan altérben, amely tartalmazza W_1-et és W_2-t, ez a legszűkebb ilyen tulajdonságú altér.
Legyen $\mathcal{C}$ a $W_1\cap W_2$ egy bázisa, és egészítsük ki ezt a W_1 altér $\mathcal{C}\cup\mathcal{B}_1$ és a W_2 altér $\mathcal{C}\cup\mathcal{B}_2$ bázisává. Legyen $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{C}\cup\mathcal{B}_2$. Belátjuk, hogy $\mathcal{B}$ bázisa W_1+W_2-nek. $\mathcal{B}\subseteq W_1\cup W_2\le W_1+W_2$. Minden $\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2$ felírható $\mathcal{C}\cup\mathcal{B}_1$-beli és $\mathcal{C}\cup\mathcal{B}_2$-beli elemek lineáris kombinációjának összegeként, tehát $\mathcal{B}$-beli elemek lineáris kombinációjaként, így $\mathcal{B}$ generátorrendszer W_1+W_2-ben. Másrészt $\mathcal{B}$ független, ugyanis, ha $\sum\lambda_i\mathbf{b}_{1i}+\sum\mu_j\mathbf{c}_j+\sum\nu_k\mathbf{b}_{2k}=\mathbf{0}$, akkor $\sum\lambda_i\mathbf{b}_{1i}=-\sum\mu_j\mathbf{c}_j-\sum\nu_k\mathbf{b}_{2k}\in W_1\cap W_2\Rightarrow\sum\nu_k\mathbf{b}_{2k}\in$

$W_1 \cap W_2$, így előáll $\mathcal{C}$-beli vektorok lineáris kombinációjaként. De $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{C}$ bázis, tehát ebből $\nu_k = 0\ \forall k$ következik. Akkor viszont $\sum \lambda_i \mathbf{b}_{1i} + \sum \mu_j \mathbf{c}_j = \mathbf{0}$, s mivel $\mathcal{B}_1 \cup C$ is bázis, ebből $\lambda_i = 0$ és $\mu_j = 0$ adódik minden i, j-re. Azt kaptuk, hogy $\mathcal{B}$ független generátorrendszer, tehát bázis $W_1 + W_2$-ben. Így a dimenziókra:

$$\begin{aligned}\dim(W_1 + W_2) = |\mathcal{B}| = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{C}| + |\mathcal{B}_2| = |\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{C}| + |\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{C}| - |\mathcal{C}| =\\ = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).\end{aligned}$$

9. *a) Mutassuk meg, hogy R^n egy alterére merőleges vektorok alteret alkotnak.*
b) Adjuk meg az $U = \langle(1, 2, -1)\rangle \leq \mathbb{R}^3$ altérre merőleges vektorok $U^\perp$ alterének egy bázisát!

Megoldás: a) A $\mathbf{0}$ mindenre merőleges, és ha $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U^\perp \Rightarrow \mathbf{vu} = \mathbf{wu} = \mathbf{0}\ \forall \mathbf{u} \in U$ $\Rightarrow (\mathbf{v} + \mathbf{w})\mathbf{u} = \mathbf{vu} + \mathbf{wu} = 0 + 0 = 0$ és $(\lambda\mathbf{v})\mathbf{u} = \lambda(\mathbf{vu}) = \lambda 0 = 0$ $(\forall\lambda \in \mathbb{R}) \Rightarrow$ $\mathbf{v} + \mathbf{w},\ \lambda\mathbf{u} \in U^\perp\ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U^\perp,\ \lambda \in \mathbb{R}$, tehát $U^\perp \leq \mathbb{R}^n$.

b) $\mathbf{x} \in U \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$, azaz $\mathbf{x}$ megoldása az $[\,1 \quad 2 \quad -1 \quad | \quad 0\,]$ egyenlet(rendszer)nek. Ennek a megoldásai:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2s + t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= t \end{aligned} \quad \text{, azaz} \quad \mathbf{x} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Így $U^\perp$ bázisa $\{(-2, 1, 1),\ (1, 0, 1)\}$.

10. *Mutassuk meg, hogy véges dimenziós vektortér minden valódi altere kisebb dimenziós, de végtelen dimenziós vektortérben ez nem igaz!*

Megoldás: Tudjuk, hogy egy n-dimenziós vektortérben nincs n-nél több elemű független rendszer. Tegyük fel, hogy $U < V$ valódi altér V-ben, és U bázisa $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Legyen $\mathbf{v} \in V \setminus U$. Ekkor $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}$ független, ugyanis ha $\sum \lambda_i \mathbf{v}_i + \lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$, akkor $\lambda \neq 0$ esetén $\mathbf{v} \in U$, ellentmondás, ha pedig $\lambda = 0$, akkor a $\mathbf{v}_i$-k függetlensége miatt $\lambda_i = 0$ minden i-re. Tehát $k < k + 1 \leq n$.
Viszont például a $V_F = F[x]$ polinomgyűrűben az $U = \{\, p(x) \,|\, p(0) = 0 \,\}$ altér végtelen dimenziós ugyanúgy, mint $F[x]$, sőt bijekciót ad V és U bázisa között az $x^k \mapsto x^{k+1}$ megfeleltetés.