1. *Legyen* $\mathcal{A} := \{(1,2,2),(-1,0,1),(1,1,-1)\}$, $\mathcal{B} := \{(1,0,1),(1,1,1),(1,-1,0)\}$.

a) Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{A}$ *és* $\mathcal{B}$ *is bázisa* $\mathbb{R}^3$*-nak!*

b) Írjuk fel a $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ *áttérési mátrixot!*

c) Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = (2,1,1)$ *egy* $\mathbf{v}$ *vektor koordinátavektora az* $\mathcal{A}$ *bázisban. Mi lesz* $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$*?*

Megoldás: a) Tekintsük a

$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

áttérési mátrixokat, ahol $\mathcal{E}$ a standard bázist jelöli. $\mathcal{A}$ és B bázisa $\mathbb{R}^3$-nak, mivel mindkét mátrix rangja 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{és} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{A}} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$, tehát $X = T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ a $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}X = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{A}}$ szimultán egyenletrendszer megoldása.
(Vagy másképp: $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ oszlopai az $\mathcal{A}$ bázis bázisvektorai $\mathcal{B}$-ben elkoordinátázva. Ez azt jelenti, hogy mindegyik $\mathbf{a}_i$ bázisvektorra meg kell oldanunk a $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{x} = \mathbf{a}_i$ egyenletrendszert, és ez éppen az előbbi szimultán egyenletrendszert adja.)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right],$$

és az utolsó mátrix második fele a keresett $T_{\mathcal{B}\to\mathcal{A}}$ áttérési mátrix.

c) $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\to\mathcal{A}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = (1,3,-2)$ (a koordinátavektorokat a számolásnál oszlopvektorként írva).
(*Ellenőrzés:* $\mathbf{v} = 2\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_2 + 1\mathbf{a}_3 = (2,5,4)$, és $1\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3 = (2,5,4)$.)

2. *a) Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát a kifejtési tétel segítségével!*

b) Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét az inverzmátrixra vonatkozó képlettel!

c) Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét elemi sorműveletekkel!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: a) Az utolsó sor szerint kifejtve: $(-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} =$
$-(0 \cdot 1 - 2 \cdot 3) - (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = 6 - 1 = 5.$

b)

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -6 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & -6/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & -1/5 & 3/5 \end{array}\right]$$

3. *a) Mutassuk meg, hogy diagonális mátrixok szorzata diagonális mátrix! Mi egy diagonális mátrix determinánsa? Mikor invertálható egy diagonális mátrix, és mi az inverze?*

b) Mutassuk meg, hogy felső háromszögmátrixok szorzata felső háromszögmátrix. Mi lesz a determinánsa? Mutassuk meg, hogy ha van inverze, akkor az is felső háromszögmátrix!

c) Határozzuk meg az elemi mátrixok determinánsát és inverzét!

Megoldás: a) Legyen $A = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, azaz $a_{ii} = d_i$ $\forall i$, és $a_{ij} = 0$, ha $i \neq j$, és legyen $B = \operatorname{diag}(d'_1, \ldots, d'_n)$. Ha $i \neq j$, akkor A i. sorának és B j. oszlopának összeszorzásakor d_i „nem találkozik” d'_j-vel, azaz minden tag 0 lesz, így a szorzat is az. Viszont $i = j$-re egyetlen nem nulla tag lesz a szorzatban, és az $d_i d'_i$. Tehát a diagonális mátrix szorzata is diagonális, és az átlóban a megfelelő diagonális elemek szorzata áll. Ha a diagonális elemek között van 0, akkor a mátrixnak van $\mathbf{0}$ sora, tehát a rangja kisebb n-nél, így a mátrix nem invertálható. Ellenkező esetben az előbbiek alapján nyilvánvaló, hogy $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) \operatorname{diag}(d_1^{-1}, \ldots, d_n^{-1}) = \operatorname{diag}(d_1^{-1}, \ldots, d_n^{-1}) \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n) = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1)$ az egységmátrix, tehát az inverzet úgy kapjuk, hogy minden diagonális elemet a reciprokával helyettesítünk.

b) Ha két felső háromszögmátrix AB szorzatában beszorozzuk A i. sorát B j. oszlopával, akkor az $(i-1)$. tagig az első tényező 0, a $(j+1)$.-től kezdve pedig a második. Ha $i > j$, akkor emiatt minden tag 0, tehát AB felső háromszögmátrix. Ha $i = j$, akkor egyetlen esetlegesen nem nulla tag van, és az a két mátrix i. diagonális elemének szorzata.

Ha a kifejtési tételt alkalmazzuk az első oszlopra, akkor indukcióval beláthatjuk, hogy egy felső háromszögmátrix determinánsa a diagonális elemeinek szorzata (sőt az alsó háromszögmátrixé is).

Pontosan akkor invertálható egy felső háromszögmátrix, ha a determinánsa nem nulla, ami az előzőek szerint akkor teljesül, ha a diagonális elemei között nincs nulla.

Ha egy felső háromszögmátrix invertálható, akkor az inverznek a szimultán egyenletrendszerrel történő kiszámításánál már csak sornak nem nulla elemmel való szorzását, és felfelé nullázást kell alkalmazni. Ez tetszőleges felső háromszögmátrixot, tehát a konstans oldalon levő egységmátrixot is, felső háromszögmátrixba visz, tehát az inverz felső háromszögmátrix.

c) A két sort megcserélő elemi mátrix $(-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = -1$ determinánsú, és önmaga inverze. A valamelyik sort c-vel megszorzó elemi mátrix diagonális, determinánsa $c \cdot 1^{n-1} = c$, és inverze diagonális, amelyben a c helyett c^{-1} áll. Végül az i. sor c-szeresét a j. sorhoz adó elemi mátrix felső vagy alsó háromszögmátrix, az átlóban 1-ekkel, és az ij helyen c-vel; ennek a determinánsa 1, és inverze annyiban különbözik az eredeti mátrixtól, hogy a c helyén ebben $-c$ áll.

4. *Bontsuk fel a*

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

mátrixot elemi mátrixok szorzatára!

Megoldás: Hozzuk az $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ mátrixot redukált lépcsős alakra elemi sorműveletekkel:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és írjuk fel az egyes sorműveletekhez tartozó elemi mátrixokat (amelyeket az egységmátrixból kapunk ugyanezen sorműveletek által):

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ E_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $E_4E_3E_2E_1A = I$ egységmátrix, tehát

$$A = (E_4E_3E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. *Melyik oldalról kell megszorozni és milyen permutációs mátrixszal az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ *mátrixot, hogy a* $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrixot kapjuk?*

Megoldás: Az A mátrixból sorműveletekkel kaphatjuk a B mátrixot: $s_1 \mapsto s_3 \mapsto s_2 \mapsto s_1$, tehát azzal a permutációs mátrixszal kell balról megszorozni, amelyet az egységmátrixból kapunk ugyanezekkel a sormműveletekkel:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. *Határozzuk meg a* $\mathbb{Z}_p$ *feletti* $n \times n$*-es invertálható mátrixok számát!*

Megoldás: Azokat az $n \times n$-es mátrixokat keressük, amelyeknek minden sora független. Az első sor tetszőleges nem nulla vektor lehet, ebből $p^n - 1$ van. A második sor nem lehet ennek skalárszorosa, de bármi más igen, tehát ott $p^n - p$ választásunk van. Ha már megvan az első k sor, és függetlenek, akkor csak arra kell ügyelni a következő lépésben, hogy azoktól ne függjön a $(k+1)$-edik. Mivel az eddigiek függetlenek voltak, a különböző lineáris kombinációik mind különböző vektorokat adnak, azaz a $(k+1)$-edik sor $(p^n - p^k)$-féle lehet. Tehát $M_n(\mathbb{Z}_p)$-ben az invertálható mátrixok száma:

$$(p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2)\cdots(p^n - p^{n-1}).$$

7. *Legyen az 5×5-ös A mátrix determinánsa 3, az 5×5-ös C mátrixé $c \neq 0$. Mi lesz a determinánsa a következő mátrixoknak?*

$2A^{-1}$ $\quad (2A)^{-1}$ $\quad A^2A^TA^{-1}$ $\quad C^{-1}AC$

Megoldás: $|2A^{-1}| = 2^5|A^{-1}| = 2^5 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{32}{3}$.

$|(2A)^{-1}| = \dfrac{1}{|2A|} = \dfrac{1}{32\cdot 3} = \dfrac{1}{96}$.

$|A^2A^TA^{-1}| = |A|^2|A^T||A^{-1}| = |A|^2|A|\dfrac{1}{|A|} = 9$.

$|C^{-1}AC| = \dfrac{1}{|C|}|A||C| = |A| = 3$.

8. *Hány inverzió van az alábbi permutációkban?*

a) $1,2,3,4$; *b)* $2,4,3,1$; *c)* $5,4,1,3,2,6$; *d)* $n,(n-1),\ldots,1$.

Írjuk fel az ezekhez tartozó permutációs mátrixokat és determinánsuk értékét!

Megoldás: a) 0; b) 4; c) 8; d) $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0&\ldots&0&0&1\\0&0&\ldots&0&1&0\\0&0&\ldots&1&0&0\\\vdots&&&&&\vdots\\0&1&\ldots&0&0&0\\1&0&\ldots&0&0&0\end{bmatrix}$$

A determinánsuk az inverziószám alapján 1, 1, 1 és $(-1)^{n(n-1)/2} = (-1)^{[\frac{n}{2}]}$ (a legutolsó determináns második alakja abból következik, hogy a mátrixon $[\frac{n}{2}]$ sorcserét végezve — az elsőt az utolsóval, a másodikat az utolsó előttivel, stb. felcserélve — az egységmátrixot kapjuk).

9. *Számítsuk ki az alábbi determináns értékét három különböző módon is: elemi sorműveletekkel, valamely sor vagy oszlop szerinti kifejtéssel és a belőle kiválasztható nem zérus értékű kígyók segítségével!*

$$\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&0\\2&0&0&3\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

Megoldás: Elemi sorműveletekkel felső háromszög alakra hozva:

$$\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&0\\2&0&0&3\\0&1&0&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&0\\0&0&-4&1\\0&1&0&1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&0\\0&0&-4&1\\0&0&-1&1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&-4&1\end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-3\end{vmatrix} = -1\cdot 1\cdot(-1)\cdot -3 = -3.$$

Fejtsük ki a második sor szerint:

$$-0+1\cdot\begin{vmatrix}1&2&1\\2&0&3\\0&0&1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1&0&1\\2&0&3\\0&1&1\end{vmatrix}+0=-2\cdot\begin{vmatrix}2&3\\0&1\end{vmatrix}-1(-1)\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}=-2\cdot2+1=-3$$

(a 3×3-as determinánsoknál a második oszlop szerint fejtettünk ki).

Kígyók determinánsának összegeként:

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&3\\0&1&0&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0&2&0\\0&1&0&0\\2&0&0&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\2&0&0&0\\0&1&0&0\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^2 1\cdot1\cdot3\cdot1+(-1)^3 2\cdot1\cdot2\cdot1+(-1)^5 1\cdot1\cdot2\cdot1=3-4-2=-3$$

(ahol az előjeleket az 1342, 3214 és 4312 permutációk inverziószámából számítottuk ki).

10. *Számítsuk ki a következő mátrix determinánsának értékét!*

$$\begin{bmatrix}b&a&a\\a&b&a\\a&a&b\end{bmatrix}.$$

Hogyan lehet ezt általánosítani $n\times n$-esre? (ötlet: adjuk az összes sort az első sorhoz.)

Megoldás:

$$\begin{vmatrix}b&a&a\\a&b&a\\a&a&b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a+b&2a+b&2a+b\\a&b&a\\a&a&b\end{vmatrix}=(2a+b)\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&a\\a&a&b\end{vmatrix}=(2a+b)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&b-a&0\\0&0&b-a\end{vmatrix}=$$

$=(2a+b)(b-a)^2$ (az első lépésben az első sorhoz hozzáadtuk a többi sort, aztán az első sorból kiemeltünk $(2a+b)$-t, majd a kapott, csupa egyesből álló első sor a-szorosát kivontuk a többi sorból, és így egy felső háromszögmátrixot kaptunk).

Lényegében ugyanezt végigcsinálhatjuk azzal az $n\times n$-es mátrixszal, amelynek főátlójában végig b, mindenhol máshol a áll. Az első lépés után az első sorban minden elem $(n-1)a+b$ lesz, és a determináns a végén $((n-1)a+b)(b-a)^{n-1}$.