1. *Adjuk meg az A mátrix LU-felbontását! (Alsó háromszögbeli elemi sorműveletekkel felső háromszög alakra hozzuk (U), és az elemi mátrixok szorzatának inverzével (L) beszorzunk. Ekkor $A = LU$.)*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A háromszög alakra hozásnál csak $s_i \mapsto s_i - cs_j$ alakú műveleteket használjunk, ahol $i > j$, és először az első sor többszöröseit vonjuk ki, majd a második sorét, és így tovább. Ha a végrehajott sorműveletekhez tartozó elemi mátrixok rendre $E_1, \ldots, E_k$, akkor $E_k \cdots E_1 A = U$ felső háromszögmátrix, és ebből $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} U$, ahol $L := E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$ alsó háromszögmátrix, csupa 1-gyel a főátlóban. L-et megkaphatjuk úgy, hogy az I egységmátrixra végrehajtjuk az A-n végzett sorműveletek inverzét fordított sorrendben: $L = E_1^{-1}(E_2^{-1} \cdots (E_k^{-1} I) \cdots)$. Így $l_{ij} = c_{ij}$ pontosan akkor, ha szerepelt $s_i \mapsto s_i - c_{ij} s_j$ alakú sorművelet, az átló alatti többi elem és minden átló fölötti 0, az átlóbeliek pedig 1-ek.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U \quad \Rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. *Oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert LU-felbontás segítségével, ha A az előző feladatbeli mátrix és $\mathbf{b} = (5, -1, 3, 7)^T$. (Az $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ és $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ egyenletrendszereket oldjuk meg.)*

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(felülről lefelé behelyettesítésekkel megoldva), és

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 11 \\ -6 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(alulról felfelé behelyettesítésekkel megoldva).

3. *Adjuk meg az A mátrix PLU-felbontását, és a determinánsát ennek segítségével! (Ha LU nem működik, alkalmas permutációs mátrixszal beszorzunk, és a szorzatra végezzük el az LU-felbontást.)*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Ennél a mátrixnál az LU-felbontás algoritmusát el sem tudjuk kezdeni, mert az első oszlop első eleme 0. De az első két sort felcserélve, azaz egy P permutációs mátrixszal beszorozva az A-t, a kapott PA mátrixra már végigmegy az algoritmus.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\text{-re} \quad PA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 5 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = U \quad \Rightarrow$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad A = P^T LU = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

4. *(Vandermonde-determináns) Mutassuk meg, hogy* $\det A = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$, *ha*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Megoldás: Nevezzük el az $x_1, \dots, x_n$ elemekből készített Vandermonde-determináns értékét $V(x_1, \dots, x_n)$-nek. n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk az állítást. $n = 2$-re $V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$. Tegyük fel, hogy n-nél kisebb értékekre igaz a képlet. A $V(x_1, \dots, x_n)$ determináns kiszámításánál vonjuk ki az $(n-1)$. sor x_1-szeresét az n.-ből, aztán az $(n-2)$. sor x_1-szeresét az $(n-1)$.-ből, …, az 1. sor x_1-szeresét a 2.-ból. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2^2 - x_1x_2 & \cdots & x_n^2 - x_1x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

(majd az első oszlop szerinti kifejtéssel, és aztán az oszlopokból az $x_2 - x_1$, $x_3 - x_1$, …, $x_n - x_1$ közös tényezők kiemelésével)

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ x_2^2 - x_1x_2 & \cdots & x_n^2 - x_1x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \Big(\prod_{2\le j\le n}(x_j - x_1)\Big) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \Big(\prod_{2\le j\le n}(x_j - x_1)\Big) V(x_2, \dots, x_n) = \Big(\prod_{2\le j\le n}(x_j - x_1)\Big)\Big(\prod_{2\le i<j\le n}(x_j - x_i)\Big) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$$

5. *Adjuk meg az* $x - y + z = 0$, $2x - y + 3z = 2$, $x + 2y + 4z = 6$ *valós egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen megoldását, és ennek segítségével írjuk fel az összes megoldást!*

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ebből leolvasható a homogén egyenletrendszer megoldása is, azaz az együtthatómátrix nulltere:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{rcr} x & = & -2t \\ y & = & -t \\ z & = & t \end{array} \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a nulltér bázisa $\{(-2, -1, 1)\}$, és a sortér ennek a merőlegese, ezért az eredeti egyenletrendszert (illetve annak a redukáltját) ki kell egészíteni a $(-2, -1, 1)(x, y, z)^T = 0$ egyenlettel.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A sortérbe eső megoldás: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, és az összes megoldás: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

6. *Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ páronként merőleges nemnulla vektorok.*

a) Mi a $\mathbf{v}_i$ vektorok skaláris szorzata az $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{v}_j$-vel, ahol $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$?

b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek!

Megoldás: a) $\mathbf{u}\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i = \lambda_i |\mathbf{v}_i|^2$, mert a merőlegesség miatt $\mathbf{v}_j \mathbf{v}_i = 0$, ha $i \neq j$

b) Ha $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$, akkor az a) rész szerint $0 = \mathbf{0}\mathbf{v}_i = \lambda_i |\mathbf{v}_i|^2$ minden i-re, s mivel $\mathbf{v}_i \neq 0 \Rightarrow |\mathbf{v}_i| \neq 0$, ebből $\lambda_i = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ következik.

7. *Keressük meg az összes olyan 2×2-es valós X mátrixot, amelyik felcserélhető az $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixszal!*
(Írjuk át az $AX = XA$ mátrixegyenletet az X elemeire vonatkozó lineáris egyenletrendszerré!)

Megoldás: Legyen $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$. Ekkor

$$AX = XA \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} x+3z & y+3u \\ x-z & y-u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & 3x-y \\ z+u & 3z-u \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{aligned} -y+3z &= 0 \\ -3x+2y+3u &= 0 \\ x-2z-u &= 0 \\ y-3z &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{aligned} x &= 2s+t \\ y &= 3s \\ z &= s \\ u &= t \end{aligned} \Rightarrow X = s\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mellesleg, ez $t' = s + t$ helyettesítéssel

$$s\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + t'\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = sA + t'I.$$

8. *Számítsuk ki az $AB + 3C$ mátrixot blokkmátrixokkal számolva:*

$$A = \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \qquad C = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right]$$

Megoldás:

$$AB + 3C = \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \hline [0 \;\; 0] + [6 \;\; 6] + [0 \;\; 0] \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 6 & 6 \\ \hline 3 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 7 & 9 \\ 9 & 15 \\ \hline 9 & 9 \end{array}\right]$$

9. *Mutassuk meg, hogy $M_n[\mathbb{R}]$ a szimmetrikus és antiszimmetrikus mátrixok altereinek direkt összege! Bontsuk fel az alábbi mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus (antiszimmetrikus) mátrix összegére!*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás: Legyen $U = \{ A \in M_n[\mathbb{R}] \mid A^T = A \}$ a szimmetrikus, $V = \{ A \in M_n[\mathbb{R}] \mid A^T = -A \}$ az antiszimmetrikus mátrixok halmaza $M_n[\mathbb{R}]$-ben. U altér, mert nem üres ($0^T = 0$), és tetszőleges $A, B \in U$, $c \in \mathbb{R}$-re $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$ és $(cA)^T = cA^T = cA$ miatt $A - B \in U$ és $cA \in U$. Ugyanígy altér V is: nem üres ($0^T = 0 = -0$), és tetszőleges $A, B \in V$, $c \in \mathbb{R}$-re $(A+B)^T = A^T + B^T = -A - B = -(A+B)$ és $(cA)^T = cA^T = c(-A) = -(cA)$ miatt $A - B \in V$ és $cA \in V$.

A két altér metszete csak a nullmátrixot tartalmazza, mert ha $A^T = A$ és $A^T = -A$, akkor $A = -A \Rightarrow 2A = 0 \Rightarrow A = 0$. Másrészt minden mátrix előáll egy U-beli és egy V-beli mátrix összegeként: $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$, ahol $(\frac{1}{2}(A + A^T))^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$ miatt az első mátrix U-beli, és $(\frac{1}{2}(A - A^T))^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T)$ miatt a második V-beli. Így $M_n[\mathbb{R}] = U \oplus V$.

Az előbb megadott $A = \frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$ felbontást alkalmazhatjuk a megadott mátrixra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. *Legyenek A és B tetszőleges $n \times n$-es mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy az $AB - BA$ mátrix főátlójában az elemek összege (a mátrix ú.n.* **nyoma***) 0.*

Megoldás: Két mátrix különbségének nyoma nyilvánvalóan a nyomok különbsége, tehát azt kell belátnunk, hogy AB és BA nyoma megegyezik.

AB főátlójának i. eleme $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$, tehát AB nyoma $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$.

BA főátlójának j. eleme $\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij}$, tehát BA nyoma $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ji} a_{ij}$, ami megegyezik AB nyomával.