**1.** *Számítsuk ki az alábbi mátrix rangját a maximális méretű nem nulla aldetermináns meghatározásával.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Megoldás:* Mivel a mátrix $3 \times 4$-es, a rangja legföljebb 3 lehet. $3 \times 3$-as nemnulla aldeterminánst viszont könnyen találhatunk benne, például az utolsó három oszlop által alkotott aldetermináns értéke $-5$.

**2.** *Oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert Cramer-szabály segítségével, illetve $A^{-1}$-gyel való beszorzással, ha*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

*Megoldás:*

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}{|A|} = \frac{6}{-1} = -6, \qquad x_2 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}}{|A|} = \frac{-11}{-1} = 11, \text{ azaz} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Másképp:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

**3.** *Mutassuk meg, hogy egy $A \in M_n[\mathbb{R}]$ mátrixra pontosan akkor teljesül az $A^TA = E$ összefüggés, azaz, hogy $A$* **ortogonális mátrix**, *ha sorvektorai páronként merőleges egységvektrok.*

*Megoldás:* Az $A^TA$ $ij$ indexű eleme az $A^T$ $i$. sorának és $A$ $j$. sorának szorzata, azaz $A$ $i$. és $j$. oszlopvektorának skalárszorzata. Tehát pontosan akkor lesz $A^TA = E$, ha minden $i \neq j$-re az $i$. és $j$. oszlop merőleges egymásra, és mindegyiknek a skalárnégyzete 1, azaz mindegyik vektor egységvektor.

**4.** *Legyen $\varphi : V_F \to W_F$ lineáris leképezés $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in V$ tetszőleges vektorok. Mely állítások következnek valamelyik másikból (esetleg több másikból)?*

*a) $\varphi$ injektív*
*b) $\varphi$ szürjektív*
*c) $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ generátorrendszer $V$-ben*
*d) $\varphi(\mathbf{v}_1), ..., \varphi(\mathbf{v}_n)$ generátorrendszer $W$-ben*
*e) $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ lineárisan független $V$-ben*
*f) $\varphi(\mathbf{v}_1), ..., \varphi(\mathbf{v}_n)$ lineárisan független $W$-ben*
*g) van olyan bázis, melynek képe lineárisan független $W$-ben.*

*Változik-e a következtetések rendszere, ha föltesszük, hogy $\dim V = \dim W$ véges szám?*

*Megoldás:* a) $\Leftrightarrow$ g): Ha $\varphi$ injektív, $\mathcal{B}$ bázis, és $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(\mathbf{b}_i) = \mathbf{0}$ valamely $\mathbf{b}_i \in \mathcal{B}$ különböző elemekre, akkor $\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{b}_i\Big) = \mathbf{0} = \varphi(0)$, és ebből $\varphi$ injektivitása miatt $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0}$ következik, amiből $\lambda_i = 0\ \forall i$, mivel $\mathcal{B}$ bázis. Fordítva, ha egy $\mathcal{B}$ bázis képe független, és $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v})$, akkor $\mathbf{u}-\mathbf{v} = \sum \lambda_i \mathbf{b}_i$-re $\varphi(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \sum \lambda_i \varphi(\mathbf{b}_i) = \mathbf{0}$, amiből $\varphi(\mathcal{B})$ függetlensége miatt $\lambda_i = 0\ \forall i$ következik, tehát $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$. Ezért $\varphi$ injektív.
d) $\Rightarrow$ b): Minden $\mathbf{w} \in W$ felírható $\mathbf{w} = \sum \lambda_i \varphi(\mathbf{v}_i) = \varphi(\sum \lambda_i \mathbf{v}_i)$ alakban, tehát előáll képként.
f) $\Rightarrow$ e): Tegyük fel, hogy $\varphi(\mathbf{v}_1), ..., \varphi(\mathbf{v}_n)$, és $\sum \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$. Ekkor $\sum \lambda_i \varphi(\mathbf{v}_i) = \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_i = 0$ $\forall i$.
Más implikációt nem találunk az egyes állítások között. Nézzünk meg néhány kombinációt! A g) állítást kihagyhatjuk ebből, mert az úgyis ekvivalens az a)-val. A dimenzió megkötése nélkül aközött, hogy egy vektorrendszer független, és az vagy egy másik vektorrendszer generátorrendszer, nyilván nem találunk kapcsolatot, tehát azt kell megvizsgálnunk, hogy c) és d) között van-e valamilyen irányú implikáció, illetve e) $\Rightarrow$ f) igaz-e az a) vagy a b) feltétel mellett.

a) + c) $\not\Rightarrow$ d): $\varphi : F \to F^2$, $\varphi(a) = (a, 0)$-ra az $\{1\}$ generátorrendszer képe $\{(1,0)\}$ nem generátorrendszer.
a) + d) $\Rightarrow$ c): Tetszőleges $\mathbf{v} \in V$-re $\varphi(\mathbf{v}) \in W$ előáll a $\varphi(\mathbf{v}_1), ..., \varphi(\mathbf{v}_n)$ vektorok lineáris kombinációjaként: $\varphi(\mathbf{v}) = \sum \lambda_i \varphi(\mathbf{v}_i) = \varphi(\sum \lambda_i \mathbf{v}_i)$, ezért a $\varphi$ injektivitása miatt $\mathbf{v} = \sum \lambda_i \mathbf{v}_i$.
a) + e) $\Rightarrow$ f): Ha $\sum \lambda_i \varphi(\mathbf{v}_i) = 0 \Rightarrow \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = \varphi(\sum \lambda_i \mathbf{v}_i) \Rightarrow \mathbf{0} = \sum \lambda_i \mathbf{v}_i \Rightarrow \lambda_i = 0\ \forall i$.
b) + c) $\Rightarrow$ d): Legyen $\mathbf{w} \in W$ tetszőleges. Ehhez van $\mathbf{v} \in V$, hogy $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, s mivel $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ generátorrendszer, $\mathbf{v} = \sum \lambda_i \mathbf{v}_i$ alkalmas $\lambda_i$-kkel $\Rightarrow \mathbf{w} = \varphi(\mathbf{v}) = \sum \lambda_i \varphi(\mathbf{v}_i)$.
b) + d) $\not\Rightarrow$ c): Legyen $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = y$. Ekkor $\mathbf{v}_1 = (0, 1)$-re $\varphi(\mathbf{v}_1) = 1$ generátorrendszer $\mathbb{R}$-ben, de $\mathbf{v}_1$ nem generátorrendszer $\mathbb{R}^2$-ben.
b) + e) $\not\Rightarrow$ f): Az előző példa $\varphi$-jére $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ független $\mathbb{R}^2$-ben, de $\varphi(\mathbf{v}_1) = 0$, $\varphi(\mathbf{v}_2) = 1$ nem független $\mathbb{R}$-ben.

Ha $\dim V = \dim W < \infty$, akkor a) és b) is ekvivalens azzal, hogy $\varphi$ (és az inverze is) izomorfizmus, ezért bármelyiknek a feltevése mellett c) $\Leftrightarrow$ d) és e) $\Leftrightarrow$ f).

**5.** *Adjuk meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát a standard bázisban! Adjuk meg mindegyiknek a magterét és képterét, és ezek dimenzióját!*
*a)* $\mathbb{R}^3$ *pontjainak z tengely körüli elforgatása* $\alpha$ *szöggel.*
*b)* $\mathbb{R}^3$ *pontjainak xy síkra való tükrözése*
*c)* $\mathbb{R}^3$ *pontjainak xy síkra való vetítése*
*d)* $\mathbb{R}^3$ *pontjainak z tengely irányú* 3*-szoros nyújtása*
*e)* $\mathbb{R}^3$ *pontjainak z tengelyre való tükrözése*
*f)* $\mathbb{R}^3$ *pontjainak z tengelyre való vetítése*

*Megoldás:* Mindegyiknél könnyű megadni az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisvektorok képét.
a) $\mathbf{i} \mapsto (\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0)$, $\mathbf{j} \mapsto (-\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ 0)$, $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{k}$;
b) $\mathbf{i} \mapsto \mathbf{i}$, $\mathbf{j} \mapsto \mathbf{j}$, $\mathbf{k} \mapsto -\mathbf{k}$;
c) $\mathbf{i} \mapsto \mathbf{i}$, $\mathbf{j} \mapsto \mathbf{j}$, $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{0}$;
d) $\mathbf{i} \mapsto 3\mathbf{i}$, $\mathbf{j} \mapsto 3\mathbf{j}$, $\mathbf{k} \mapsto 3\mathbf{k}$;
e) $\mathbf{i} \mapsto -\mathbf{i}$, $\mathbf{j} \mapsto -\mathbf{j}$, $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{k}$;
f) $\mathbf{i} \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{j} \mapsto \mathbf{0}$, $\mathbf{k} \mapsto \mathbf{k}$;
és így a standard mátrixok:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{f)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A magok és képek:

| | a) | b) | c) | d) | e) | f) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{Ker}\varphi$ | 0 | 0 | $\langle\mathbf{k}\rangle$ | 0 | 0 | $\langle\mathbf{i},\ \mathbf{j}\rangle$ |
| $\dim\operatorname{Ker}\varphi$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| $\operatorname{Im}\varphi$ | $\mathbb{R}^3$ | $\mathbb{R}^3$ | $\langle\mathbf{i},\ \mathbf{j}\rangle$ | $\mathbb{R}^3$ | $\mathbb{R}^3$ | $\langle\mathbf{k}\rangle$ |
| $\dim\operatorname{Im}\varphi$ | 3 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 |

**6.** *Az előző feladatot módosítsuk úgy, hogy a forgatás, tükrözés, vetítés tengelye a* $(2, 2, 1)$ *vektorral párhuzamos, origón átmenő egyenes, illetve síkja a* $2x + 2y + z = 0$ *egyenletű sík legyen. Alkalmazzunk báziscserét és diadikus szorzatos módszert! A báziscserénél a másik bázis legyen olyan egységvektorokból álló bázis, amelynek két eleme a* $(2, 2, 1)$ *és* $(1, -2, 2)$ *vektorokkal párhuzamos!*

*Megoldás:* Olyan bázist érdemes választani, amelyiknek a képét könnyű megadni és elkoordinátázni az adott bázisban, tehát érdemes beleválasztani egy $(2, 2, 1)$-gyel párhuzamos (az az egyenes érintővektora és a sík normálvektora), és két arra merőleges vektort. Még jobb, ha ezek páronként merőleges egységvektorok, mert akkor az áttérési mátrix ortogonális lesz (ld. a 3. feladatot), így az inverzét egyszerűen transzponálással kapjuk meg. A javasolt $(1,-2,2)$ merőleges $(2,2,1)$-re, és a vektoriális szorzatuk merőleges lesz mindkettőre. $(2,2,1)\times(1,-2,2)=(6,-3,-6)$. Legyen $\mathcal{E}$ a standard bázis, és a másik $\mathcal{B}=\{\,\frac{1}{3}(1,-2,2),\ \frac{1}{3}(2,-1,-2),\ \frac{1}{3}(2,2,1)\,\}$, ebben a sorrendben. Ekkor a transzformációk mátrixa $\mathcal{B}$-ben éppen az előző feladatban kiszámított standard mátrixokkal egyezik meg. A standard mátrixot ezután kiszámíthatjuk a $[\varphi]_{\mathcal{E}}=P\,[\varphi]_{\mathcal{B}}\,P^{-1}$ képlettel, ahol

$$P=T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&2\\-2&-1&2\\2&-2&1\end{bmatrix}\quad\text{és}\quad P^{-1}=P^T=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&2\\2&-1&-2\\2&2&1\end{bmatrix}$$

A 6 transzformáció standard mátrixa:

a) $\frac{1}{9}\begin{bmatrix}4+5c&4-4c-3s&2-2c+6s\\4-4c+3s&4+5c&2-2c-6s\\2-2c-6s&2-2c+6s&1+8c\end{bmatrix}$, ahol $c=\cos\alpha$, $s=\sin\alpha$

b) $\frac{1}{9}\cdot\begin{bmatrix}1&-8&-4\\-8&1&-4\\-4&-4&7\end{bmatrix}$ c) $\frac{1}{9}\cdot\begin{bmatrix}5&-4&-2\\-4&5&-2\\-2&-2&8\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ e) $\frac{1}{9}\cdot\begin{bmatrix}-1&8&4\\8&-1&4\\4&4&-7\end{bmatrix}$ f) $\frac{1}{9}\cdot\begin{bmatrix}4&4&2\\4&4&2\\2&2&1\end{bmatrix}$

A merőleges vetítések és tükrözések standard mátrixát közvetlenül is kiszámíthatjuk abból, hogy egy origón átmenő, $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenesre való merőleges vetítés mátrixa $A=\dfrac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{|\mathbf{v}|^2}$. Ezt használva az egyenesre való tükrözés mátrixa $2A-I$, a $\mathbf{v}$ normálvektorú, origón átmenő síkra való merőleges vetítés mátrixa $I-A$, az ugyanerre a síkra való tükrözés mátrixa pedig $I-2A$. Itt $\mathbf{v}=(2,2,1)^T$ az egyenes irányvektora, illetve a sík normálvektora, tehát az egyes mátrixok

$$\text{f)}\ A=\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{|\mathbf{v}|^2}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}4&4&2\\4&4&2\\2&2&1\end{bmatrix}\qquad \text{b)}\ I-2A=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&-8&-4\\-8&1&-4\\-4&-4&7\end{bmatrix}$$

$$\text{c)}\ I-A=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}5&-4&-2\\-4&5&-2\\-2&-2&8\end{bmatrix}\qquad \text{e)}\ 2A-I=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-1&8&4\\8&-1&4\\4&4&-7\end{bmatrix}$$

**7.** *Adjuk meg a vektoriális szorzás, mint lineáris transzformáció mátrixát a standard bázisban! Mi a magtere és a képtere?*

*Megoldás:* Az $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ vektorral (balról) való vektoriális szorzás hatása és standard mátrixa

$$f(x,y,z)=(a,b,c)\times(x,y,z)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a&b&c\\x&y&z\end{vmatrix}=(bz-cy,\ cx-az,\ ay-bx),\qquad A=\begin{bmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{bmatrix}.$$

A magtere az $(a,b,c)$-vel párhuzamos vektorokból áll, azaz $\operatorname{Ker} f=\langle(a,b,c)\rangle$, mert két vektor vektoriális szorzata pontosan akkor nulla, ha valamelyik vektor nulla, vagy a vektorok párhuzamosak egymással. A képtér nyilván benne van az $\langle(a,b,c)\rangle^{\perp}$ altérben, másképpen az $(a,b,c)$ normálvektorú $ax+by+cz=0$ síkban (két vektor vektoriális szorzata merőleges mindkét vektorra), és a dimenziótétel miatt a képtér $3-1=2$-dimenziós, ezért az szükségképpen a teljes sík.

**8.** *a) Adjunk meg egy lineáris transzformációt, amely az $\mathbb{R}^3$ standard bázisát a $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ vektorokba viszi! Írjuk fel a mátrixát a standard bázisban!*

*b) Adjunk meg egy lineáris transzformációt, amely az $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3$ független vektorait $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ vektorokba viszi! Írjuk fel a mátrixát a standard bázisban!*

*Megoldás:* a) Mivel $\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, a leképezés linearitása miatt $(x, y, z) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \mapsto x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$. Ennek a standard mátrixa az a mátrix, amelynek oszlopai rendre a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ és $\mathbf{v}_3$ vektorok.

b) Legyen az a) rész szerint $A = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3]$ a standard bázist a $\mathbf{v}_i$-kbe képező $f$ transzformáció, és $B = [\mathbf{w}_1|\mathbf{w}_2|\mathbf{w}_3]$ a standard bázist a $\mathbf{w}_i$-kbe képező $g$ transzformáció standard mátrixa. Ekkor $\mathbf{w}_i$-ket $\mathbf{v}_i$-kbe az $f \circ g^{-1} : \mathbf{w}_i \mapsto \mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ kompozíció képezi, amelynek standard mátrixa $AB^{-1} = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3][\mathbf{w}_1|\mathbf{w}_2|\mathbf{w}_3]^{-1}$.

**9.** *a) Az $xy + z = 0$ felületet mibe viszi az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*b) Forgasssuk el $\alpha$ szöggel a standard bázis elemeit a $z$ tengely körül. Mi lesz az $xy + z = 0$ felület egyenlete az új bázisban?*

*Megoldás:* a) Nevezzük $A$-nak a megadott mátrixot, és legyen $\mathbf{v} = (x, y, z)^T$, $\mathbf{w} = (p, q, r)^T$ pedig a $\mathbf{v}$ vektor képe: $A\mathbf{v} = \mathbf{w}$. Azt kell megmondanunk, hogy milyen egyenletet elégít ki $\mathbf{w}$, amikor $\mathbf{v}$ kielégíti az $xy + z = 0$ egyenletet.

$$\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{w}, \text{ azaz } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ -p + q \\ r \end{bmatrix}.$$

Tehát $(x, y, z)$ rajta van az felületen $\Leftrightarrow p(-p + q) + r = 0 \Leftrightarrow -p^2 + pq + r = 0$. Ez azt jelenti, hogy az új felület egyenlete $-x^2 + xy + z = 0$.

b) Az $\alpha$ szöggel való elforgatás mátrixa

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ és így } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \\ z' \end{bmatrix}$$

az új bázis szerint $(x', y', z')$ pont eredeti koordinátavektora.
Így az az $xy + z = 0$ felület pontjai az új koordinátákkal az

$$(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + z' = 0$$

egyenletet elégítik ki. Kiszorozva és egyszerűsítve, az új koordiátarendszerben a felület egyenlete

$$\frac{1}{2}(x')^2\sin 2\alpha - \frac{1}{2}(y')^2\sin 2\alpha + x'y'(\cos 2\alpha) + z' = 0.$$