**1.** *Legyen $W \leq \mathbb{R}^3$ altér, melynek generátorrendszere $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$.*
*a) Adjuk meg $W^\perp$ egy bázisát.*
*b) Határozzuk meg $W$ altérre való merőleges vetítés mátrixát báziscserével és anélkül, azaz használva $P_W = A(A^TA)^{-1}A^T$ képletet.*
*c) Bontsuk fel a $\mathbf{v} = (1,1,1)$ vektort $W$-beli és $W^\perp$-beli összetevők összegére!*

*Megoldás:* a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \text{ megoldása } \begin{matrix} x = -t \\ y = \phantom{-}t \\ z = \phantom{-}t \end{matrix}, \text{ azaz } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát $W^\perp$ bázisa $\{(-1,1,1)\}$.

b) Báziscserével: A $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,1,0),(-1,1,1)\}$ bázisban a vetítés mátrixa a $D = \operatorname{diag}(1,1,0)$ mátrix, mert a bázis első két vektorát (a $W$-beli vektorokat) önmagukba képezi, így ezek koordinátavektora $(1,0,0)^T$ és $(0,1,0)^T$, az utolsót, amely $W$-re merőleges, pedig $\mathbf{0}$-ba. Így a vetítés standard mátrixa $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} D T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} D T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A $P_W = A(A^TA)^{-1}A^T$ képlettel, ahol $A$ oszlopai a $W$ báziselemei:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (A^TA)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$P_W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c) $\mathbf{v} = P_W\mathbf{v} + (\mathbf{v} - P_W\mathbf{v}) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

**2.** *Legyen $W$ az $(1,0,1),(1,1,0)$ vektorok által generált altér, $W_1$ pedig az $(1,1,1)$ vektor által generált altér $\mathbb{R}^3$-ban.*
*a) Határozzuk meg a $W_1$ mentén $W$-re való vetítés mátrixát standard bázisban báziscserével.*
*b) Határozzuk meg, a $W$ mentén $W_1$-re való vetítés mátrixát standard bázisban báziscserével.*
*c) Az a) és b) feladatokat oldjuk meg, a $P_1 = [W,0][W,W_1]^{-1}$, $P_2 = [W_1,0][W_1,W]^{-1}$ képlettel is!*

*Megoldás:* a) A $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ bázisban az egyenes mentén a síkra való vetítés mátrixa $D = \operatorname{diag}(1,1,0)$, így a standard bázisban $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} D T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} D T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) A $\mathcal{B}$ bázisban a sík mentén az egyenesre való vetítés mátrixa $\operatorname{diag}(0,0,1)$, így a standard mátrixa $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} D T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**3.** *Határozzuk meg az $x - y = 1, x - y = 2$ ellentmondásos lineáris egyenletrendszer legjobban közelítő megoldásait normálegyenlet segítségével! Határozzuk meg az egyetlen sortérbe eső (minimális abszolútértékű) közelítést.*

*Megoldás:* $[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$

$$[A^TA|A^T\mathbf{b}] = A^T[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & | & 3 \\ -2 & 2 & | & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3/2 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Az utóbbinak a megoldása $\begin{bmatrix} 3/2 + t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$. A minimális abszolút értékű közelítő megoldást az $(1, 1)$ által generált nulltérre való merőlegesség feltételének hozzáadásával kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3/2 \\ 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3/2 \\ 0 & 2 & | & -3/2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3/4 \\ 0 & 1 & | & -3/4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}.$$

**4.** *(Lineáris regresszió) Legyen $y = a + bx$ ismeretlen egyenes. Három mérési eredmény szerint $(1, 1), (2, 3), (4, 6)$ az egyenesen lévő $(x_i, y_i)$ pontok mért koordinátái. Keressük a legjobban közelítő megoldást $(a, b)$-re normálegyenlet segítségével. (A sorai $1, x_i$-k b sorai $y_i$-k)*

*Megoldás:* Az $a + b = 1$, $a + 2b = 3$, $a + 4b = 6$ egyenletrendszer legjobban közelítő megoldását keressük.

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & | & 3 \\ 1 & 4 & | & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow [A^TA|A^T\mathbf{b}] = A^T[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 3 & 7 & | & 10 \\ 7 & 21 & | & 31 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & | & 10 \\ 1 & 7 & | & 11 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 7 & | & 11 \\ 0 & -14 & | & -23 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1/2 \\ 0 & 1 & | & 23/14 \end{bmatrix}.$$

Tehát a legjobban közelítő egyenes (azaz amelynél az adott $x_i$ értékeknél a hibák négyzetösszege minimális), $y = -\frac{1}{2} + \frac{23}{14}x$.

**5.** *Határozzuk meg a következő mátrixok pszeudoinverzét a független sorokra vagy oszlopokra vonatkozó képlet, vagy bázisfelbontás segítségével:*

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

*Megoldás:* Ha egy $B$ mátrix teljes oszloprangú, akkor $B^{||-1||} = (B^TB)^{-1}B^T$, ha $C$ teljes sorrangú, akkor $C^{||-1||} = C^T(CC^T)^{-1}$, ha az $A$ mátrixra egyik feltétel sem teljesül, akkor az $A$ bázisfelbontása olyan $A = BC$ szorzatot ad, amelyre $B$ teljes oszloprangú és $C$ teljes sorrangú, és ekkor $A^{||-1||} = C^{||-1||}B^{||-1||}$.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = BC = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$C^{||-1||} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B^{||-1||} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{||-1||} = C^{||-1||}B^{||-1||} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = BC = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$C^{||-1||} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B^{||-1||} = \left( \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{||-1||} = C^{||-1||} B^{||-1||} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ teljes sorrangú, így $C^{||-1||} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

d) $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ teljes sorrangú, így $C^{||-1||} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \tfrac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

**6.** *Mutassuk meg, hogy általában nem igaz, hogy* $(AB)^{||-1||}$ *egyenlő lenne* $B^{||-1||}A^{||-1||}$*-zel. Tekintsük az* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *és* $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *mátrixokat!*

*Megoldás:* Legyen $C = AB$. A három mátrix bázisfelbontása

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ amiből}$$

$$A^{||-1||} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^{||-1||} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{||-1||} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B^{||-1||} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^{||-1||} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{||-1||} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C^{||-1||} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^{||-1||} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{||-1||} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ de } B^{||-1||}A^{||-1||} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**7.** *Oldjuk meg a 3. feladatot az együtthatómátrix pszeudoinverzével való beszorzással is!*

*Megoldás:* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$A^{||-1||} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^{||-1||} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{||-1||} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ A legjobb közelítő megoldás:

$$A^{||-1||}\mathbf{b} = \tfrac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}.$$