

## Gyakorló feladatok

- Határozzuk meg az alábbi értékeket:
  - $\varphi(23)$ ,  $\varphi(21)$ ,  $\varphi(63)$ ,  $\varphi(10!)$ ,
  - $120^{24} \bmod 23$ ,  $115^{21} \bmod 21$ ,  $68^{111} \bmod 63$ ,  $111^{68} \bmod 63$ . Vigyázzunk, 111 nem relatív prím a 63-hoz!
  - $3^{3^4}$  utolsó két számjegye.
- Készítsük el a  $\mathbb{Z}_5$  és  $\mathbb{Z}_6$  gyűrűk összeadás- és szorzástábláját!  
Készítsük el a mod 6 redukált maradékosztályok csoportjának,  $\mathbb{Z}_6^*$ -nak a szorzástábláját!
- Bizonyítsuk be, hogy a  $P(H)$  hatványhalmaz a szimmetrikus differencia  $((A \cup B) \setminus (A \cap B))$  és metszet műveletekkel kommutatív, egységelemes gyűrűt alkot!
- Adjuk meg az alábbi komplex számok algebrai alakját:
  - $(3 - 4i)(7 + 8i)$
  - $(3 - 4i)/(2 - i)$
  - $i^{2018}$
  - $(1 + i)^9$
- Legyen  $z = 1 + 3i$  és  $u = 2 - i$ . Számítsuk ki az alábbi kifejezések értékét:
  - $z\bar{z}$
  - $u/\bar{u}$
  - $|z - u|$
  - $|2z - zu|$
  - $|u/z\bar{u}^3|$ .
- Oldjuk meg a komplex számok halmazán a

$$z^2 + 2iz - 1 + i = 0$$

egyenletet!

- Mi a mértani helye a síkon azon pontoknak, amelyeknek megfelelő  $z$  komplex számokra:
  - $|z - 5 + i| = 2$
  - $|z - i| = |z + i|$
  - $|(z - 3 + 4i)/(z - i)| \geq 1$
  - $|z| = 3iz$
  - $|z| = iz$
  - $z + \bar{z} < 4$ .

**Házi feladatok**

Beadási határidő: október 7.

*A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!*

1. Egyszerűsítsük a  $356^{365} \bmod 175$  hatványt az Euler–Fermat-tétel segítségével, majd számoljuk ki az értékét!
2. Készítsük el a modulo 12, illetve modulo 8 redukált maradékosztályok csoportjának,  $\mathbb{Z}_{12}^*$ -nak és  $\mathbb{Z}_8^*$ -nak a szorzástábláját!
3. Bizonyítsuk be, hogy a valós térvektorok halmaza az összeadással és a vektoriális szorzással, illetve a  $P(H)$  hatványhalmaz az unió és metszet műveletekkel nem alkot gyűrűt!
4. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a

$$z^2 + 4iz - 3 = 0$$

egyenletet!

5. Határozzuk meg az  $\frac{(1 + 2019i)^{2019}}{(1 - 2019i)^{2019}}$  komplex szám abszolút értékét!
6. Mi a mértani helye a síkon azoknak a pontoknak, amelyeknek megfelelő  $z$  komplex számokra:
  - a)  $|z - 1 + i| > 1$
  - b)  $z - \bar{z} = 2i$
- 7\*. Bizonyítsuk be, hogy  $\varphi(n!)$  pontosan akkor nem osztható  $n$ -nel, ha  $n$  prím!