Gyakorló feladatok

1. Az alábbi mátrixok közül melyek vannak lépcsős, illetve redukált lépcsős alakban? A redukált lépcsőseknél írjuk fel a mátrixhoz tartozó lineáris egyenletrendszer megoldását vektoros alakban!

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$ c) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ e) $\left[\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

a) $$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ -x + y - z &= 2 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ 4x + 4y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 7x + 14y - 21z &= 7 \\ x + 2y - 3z &= 1 \\ 5x + 10y + 15z &= 5 \\ 3x + 6y - 9z &= 3 \end{aligned}$$

c) Mit jelent az egyenletrendszerek megoldása a sormodellben?
d) Mit jelent az oszlopmodellben?
e) Ki tudunk-e választani az eredeti egyenletek közül kevesebbet, melyek ugyanezt a megoldást adják? Melyeket?

3. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, amelynek:
a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és egyértelmű a megoldása;
b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
c) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van és nincs megoldása;
d) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van és pontosan 5 megoldása van (van-e ilyen valós, illetve véges test fölötti egyenletrendszer)?

4. Az a és b paraméterek értékétől függően hány megoldása van a következő mátrixhoz tartozó valós egyenletrendszernek? Oldjuk meg a feladatot $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött is!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -a & b \\ 1 & 3 & a & 0 \end{array}\right]$$

5. Határozzuk meg az $x + 3y + z = 2$ és $x + 2y + 2z = 5$ egyenletű síkok metszetét! Ha a metszet egyenes, adjuk meg az egyenes explicit (paraméteres) egyenletét vektorosan és koordinátánként is!

6. Adjuk meg a $2x - y + z = 1$ sík explicit egyenletét, illetve egyenletrendszerét: oldjuk meg az egyenletet, mint egy egy egyenletből álló egyenletrendszert, és írjuk fel a megoldást vektorosan és koordinátánként is!

7. Legyen $\mathbf{a} = (1, 0, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 2, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$. Lássuk be, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan függetlenek. A $\mathbf{v} = (1, 0, 0, 0)$ és $\mathbf{w} = (1, 1, 1, 1)$ vektorok közül azt amelyiket lehet, állítsuk elő az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineáris kombinációjaként!

Házi feladatok

Beadási határidő: november 11.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ x - z &= -2 \\ 2x + y + z &= 7 \end{aligned}$$

2. Az alábbi mátrix egy olyan valós lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa, amelynek van megoldása. Írjunk be a *-ok helyére olyan (nem feltétlenül azonos!) számokat, hogy ez a mátrix redukált lépcsős alakú legyen! Indokoljuk is, hogy miért azokat a számokat írtuk! Adjuk meg a kapott egyenletrendszer megoldását vektorosan!

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & 1 & * & 0 \\ * & * & -1 & * & 2 \\ 0 & 0 & 0 & * & 1 \end{array}\right]$$

3. Az a és b értékétől függően hány megoldása van az alábbi valós egyenletrendszernek?

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 \\ x + 2y - z &= -1 \\ x - y + 2z &= a \\ x + by + z &= 3 \end{aligned}$$

4. Legyen adva egy k egyenletből és n ismeretlenből álló racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer. Döntsük el melyek igazak az alábbiak közül:

a) Ha $k \leq n$, akkor az egyeletrendszernek van megoldása.

b) Ha $k > n$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.

c) Ha $k < n$ és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor végtelen sok megoldása is van.

d) Ha $k > n$ és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor csak 1 megoldása van.

e) Ha létezik valós megoldás, akkor létezik (csupa) racionális megoldás is.

f) Ha bármely $k-1$ egyenletet kiválszatva az így kapott egyenletrendszernek van megoldása, akkor az eredetinek is van megoldása.

5. Határozzuk meg a $2x-y+3z=3$, $x+y+z=4$, $3y-z=5$ egyenletű síkok metszetét. Ha a metszet egyenes, akkor adjuk meg az egyenes egyenletét vektorosan és koordinátánként is!

6. Lineárisan függetlenek-e az $\mathbf{a}=(1,1,0,-2)$, $\mathbf{b}=(-1,2,1,1)$ és $\mathbf{c}=(1,4,1,-3)$ vektorok $\mathbb{R}^4$-ben? Írjuk fel, amelyiket lehet a $\mathbf{v}=(1,1,1,1)$ és $\mathbf{w}=(-1,5,2,0)$ vektorok közül az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok lineáris kombinációjaként!

7*. Bizonyítsuk be, hogy ha az $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{Z}$ különböző egészekre és $y_1,\dots,y_n$ egészekre a legföljebb $(n-1)$-edfokú interpoláló polinom nem egész együtthatós, akkor magasabb fokú $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sem létezik, amelyre $f(x_i)=y_i$ $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$.