Gyakorló feladatok

1. Válasszunk ki az A mátrix oszlopai közül egy maximális független vektorhalmazt, és írjuk fel a többi vektort ezek lineáris kombinációjaként! Adjuk meg A sorterének és nullterének is egy-egy bázisát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Az $\mathbb{R}^3$ alábbi részhalmazai közül melyik altér, illetve affin altér? Amelyik altér, annak adjuk meg egy bázisát, amelyik nem altér, de affin altér, azt adjuk meg $\mathbf{u} + V$ alakban, ahol V altér!
a) $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{v}| = 1\}$ b) $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 0\}$ c) $\{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 1\}$

3. Bizonyítsuk be, hogy két altér metszete mindig altér, de két altér uniója csak akkor altér, ha az egyik altér tartalmazza a másikat!

4. Mi lehet a redukált lépcsős alakja az $A = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \mathbf{a}_3] \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ mátrixnak, ha $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$, de $\mathbf{a}_1 \notin \operatorname{span}(\mathbf{a}_3)$?

5. Legyen $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (0, 2, -1), (1, 1, 0)\}$.
a) Lássuk be, hogy $\mathcal{B}$ bázis $\mathbb{R}^3$-ben!
b) Adjuk meg a $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ vektor koordinátavektorát a $\mathcal{B}$ bázisra nézve!
c) Melyik az a $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ vektor, amelynek koordinátavektora a $\mathcal{B}$ bázisra nézve

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}?$$

6. Tekintsük a következő mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki a BC, CB, $5A$, $A + D$, AD, DA, $D^T D + A$ mátrixkifejezések közül azokat, amelyek értelmezve vannak!

7. Keressünk olyan 2×2-es és 3×3-as C valós mátrixokat, melyekre: $C^2 = O$, de $C \neq 0$.

8. Mennyi a rangja annak a valós $n \times n$-es mátrixnak, amelynek az elemei sorfolytonosan leolvasva $1, 2, \ldots, n^2$?

Házi feladatok

Beadási határidő: november 18.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Egy valós lineáris egyenletrendszernek megoldása $(1, 0, -1, 1)$ és $(2, 3, 1, 0)$ is. Adjuk meg ennek az egyenletrendszernek végtelen sok különböző megoldását!

2. Válasszuk ki az alábbi A mátrix oszlopterének egy bázisát az oszlopok közül, és írjuk fel mind az öt oszlop koordinátavektorát erre a bázisra nézve! Adjuk meg a sortér és a nulltér egy-egy bázisát is!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

3. Altér-e, illetve affin altér-e $\mathbb{R}^3$-ben a következő?
   a) Az xy sík és a z tengely uniója;
   b) az $x - 2y + z = 2$ egyenletű sík;
   c) az $x = 4 + 2t$, $y = 2 + t$, $z = -6 - 3t$ egyenletrendszerrel megadott egyenes.

4. Összesen legalább hány nemnulla eleme van az $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixoknak, ha AB-ben nincs nulla elem?

5. Keressük meg az összes olyan 2×2-es valós X mátrixot, amelyik felcserélhető az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrixszal! (Írjuk át az $AX = XA$ mátrixegyenletet az X elemeire vonatkozó lineáris egyenletrendszerré!)

6. Határozzuk meg az alábbi A mátrix rangját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2i & 1 + 2i \\ 3 & i & 3 - i \\ 4i & -3 & -1 + 4i \end{bmatrix}$$

7*. a) Hány $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ független vektorpár van egy kétdimenziós, illetve háromdimenziós $\mathbb{Z}_3$ fölötti vektortérben?
   b) Hány egy-, illetve kétdimenziós altere van $\mathbb{Z}_3^3$-nek?