Gyakorló feladatok

1. Mi történik egy $n \times n$-es mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi mátrixokkal megszorozzuk?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

2. Igazak-e minden $n \times n$-es A, B mátrixra az alábbi egyenlőségek?

a) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ b) $(A+I)(A-I) = A^2 - I^2$
c) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ d) $(AB)^T = A^T B^T$

3. Írjuk fel az alábbi A mátrix bázisfelbontását, majd ezt felhasználva bontsuk fel a mátrixot $r(A)$ darab 1 rangú mátrix összegére!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét, ha van!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Oldjuk meg az alábbi mátrixegyenleteket, ha lehet! A, B, C, D az előző feladatban szereplő mátrixok.

a) $CX = D$ b) $BX = C$ c) $XB = M$, ahol $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ d) $XB = AM$

6. Lineárisak-e a következő leképezések? Ha igen, mi a standard mátrixuk?

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+1,\ y+2,\ z+3)$
b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+y,\ -y,\ -x+2y)$
c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}|$
d) az $\mathbb{R}^3$ $90°$-os forgatása a z tengely körül
e) az $x + y - 2z = 0$ síkra való tükrözés
f) $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ahol f az $y = x$ egyenesre, g pedig az x tengelyre való tükrözés

7. a) Adjunk meg olyan $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációt, a standard mátrixával, amelyre $0 \neq \operatorname{Im} f \leq \operatorname{Ker} f$.
b) Adjunk meg olyan $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixot, amelyre $A^3 = 0$, de $A^2 \neq 0$. Érdemes itt is először ilyen tulajdonságú lineáris transzformációt keresni.

Házi feladatok

Beadási határidő: november 25.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Határozzuk meg az alábbi A mátrix bázisfelbontását, és ennek segítségével bontsuk fel az A mátrixot $r(A)$ darab 1 rangú mátrix összegére!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Hogyan változhat a mátrix rangja, ha egyetlen eleméhez 1-et hozzáadunk? Adjunk példát mindegyik esetre!

3. Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Legyen $f : V \to W$ lineáris transzformáció.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha $\operatorname{Ker} f = 0$, akkor f a V minden független részhalmazát a W független részhalmazába viszi.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $\operatorname{Im} f = W$, akkor f a V minden generátorrendszerét a W generátorrendszerébe viszi.

5. Adjuk meg annak a lineáris transzformációnak a standard mátrixát, amelyet úgy kapunk, hogy először az $x = z$ síkra tükrözünk, majd a kapott vektort elforgatjuk a z tengely körül $90°$-kal!

6. Adjunk meg olyan $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációt a standard mátrixával, amelyre $0 \neq \operatorname{Ker} f \leq \operatorname{Im} f$.

7*. Legyen A $n \times n$-es invertálható mátrix. Mely $\mathbf{v}$ vektorokra igaz, hogy az A bármely sorához hozzáadhatjuk $\mathbf{v}$ alkalmas skalárszorosát úgy, hogy a mátrix rangja csökkenjen?