Gyakorló feladatok

1. Van-e olyan $n > 0$, amelyre $A^n = I$, ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}?$$

2. Tekintsük a $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(2,1,3),(1,2,4)\}$ bázist $\mathbb{R}^3$-ben. Mi a $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ és a $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ áttérési mátrix? Adjuk meg a $\mathbf{v} = (1,1,2)$ vektor koordinátavektorát a $\mathcal{B}$ bázisra nézve!

3. Mi lesz az $\{(x,y) \mid 3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4\} \subseteq \mathbb{R}^2$ alakzat egyenlete, ha a standard koordinátarendszer helyett a $\mathcal{B} = \{(1,1),(-1,1)\}$ bázishoz tartozó koordinátarendszerben írjuk fel?

4. Ha az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

akkor mi a mátrixa a $\mathcal{C} = \{\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1\}$, illetve a $\mathcal{D} = \{\mathbf{b}_1, 2\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban?

5. Írjuk fel az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban!

a) Az $y = x$ egyenesre való tükrözés az $\mathbb{R}^2$ standard $\mathcal{E}$, továbbá a $\mathcal{B} = \{(1,1),(-1,1)\}$, illetve $\mathcal{C} = \{(1,1),(-2,0)\}$ bázisában;

b) az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, a $\mathcal{B} = \{(1,2),(1,1)\}$ bázisban;

c) az $S:\ x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés egy tetszőleges olyan bázisban, amelynek elemei mind párhuzamosak az S síkkal vagy merőlegesek rá, illetve a standard bázisban.

6. Írjuk fel alkalmas bázisban, majd a standard bázisban is a $\mathbf{v} = (1,1,1)$ irányvektorú, origón átmenő egyenes körüli $90°$-os forgatás mátrixát!

7. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát elemi sorműveletek segítségével!

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

8. Sorműveletek nélkül, csak inverziószámolással határozzuk meg az alábbi kígyók determinánsát!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

9. Legyen A egy 5×5-ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, és $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$ mátrixoknak?

Házi feladatok

Beadási határidő: december 2.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Tekintsük a $\mathcal{B} = \{(1,0,2,0),(0,1,3,2),(-1,2,0,3),(1,2,1,2)\}$ bázist $\mathbb{R}^4$-ben. Mi a $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ és a $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ áttérési mátrix? Adjuk meg a $\mathbf{v} = (1,1,1,1)$ vektor koordinátavektorát a $\mathcal{B}$ bázisra nézve!

2. Ha az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

akkor mi a mátrixa a $\mathcal{C} = \{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, -\mathbf{b}_3\}$ bázisban?

3. Írjuk fel az $f(x, y.z) = (x - y + z,\ -2x + z,\ x + y)$ lineáris transzformáció standard mátrixát, és a $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(2,-1,2),(0,1,1)\}$ bázis szerinti mátrixát!

4. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát!

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. a) Mi az inverziók száma az $5,1,2,4,3$ és a $2,3,4,\ldots,n,1$ permutációban?
b) Mi az i és j értéke az $1,2,3,4,5,6$ elemek $2,5,i,3,j,1$ permutációjában, ha az inverziók száma páros?

6. Legyenek az $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mátrix oszlopai rendre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, és tegyük fel, hogy $\det A = 4$, míg egy másik $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mátrix determinánsa -3. Mi a determinánsa a következő mátrixoknak?

a) $2A^T$ b) $(3A)^{-1}B^4$ c) $[\,\mathbf{b} \mid \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \mid 3\mathbf{c}\,]$

7*. Legyen A az az $n \times n$-es mátrix $n \geq 7$-re, amelynek az (i,j) indexű eleme az ij szorzat n-nel vett legkisebb pozitív maradéka (tehát 0 helyett n-et írunk). Bizonyítsuk be, hogy A determinánsa 0.