Gyakorló feladatok

1. Számítsuk ki a következő $n \times n$-es determináns értékét! (Ötlet: a második sort vonjuk ki az összes többiből.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}$$

2. Számítsuk ki a

$$\begin{bmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{bmatrix}$$

determináns értékét! Hogyan lehet ezt általánosítani $n \times n$-es mátrixra? Mennyi a mátrix rangja az a, b, n értékektől függően?

5. Határozzuk meg az A mátrix LU-felbontását! Számítsuk ki ebből az A determinánsát és az $A\mathbf{x} = [1 \ -1 \ 0]^T$ egyenletrendszer megoldását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát és inverzét aldeterminánsok segítségével:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Cramer szabály alkalmazásával oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ha A az előző feladatbeli mátrix, $\mathbf{b} = [0 \ 1 \ 1]^T$.

8. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát minél egyszerűbben!

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c+d & c^2+d^2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & 1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}$

9. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját! Keressünk benne a rangnak megfelelő méretű nemnulla aldeterminánst!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Házi feladatok

Beadási határidő: december 9.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni! Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Határozzuk meg az A mátrix LU-felbontását! Számítsuk ki ebből az $A\mathbf{x} = [1\ 2\ 2]^T$ egyenletrendszer megoldását!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

2. Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát és inverzét aldeterminánsok segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. A Cramer-szabály segítségével határozzuk meg az y értékét az $x-2y+z=5$, $y-z=2$, $x+y+2z=0$ egyenletrendszer megoldásában!

4. Határozzuk meg az alábbi mátrix determinánsát!

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját! Keressünk benne a rangnak megfelelő méretű nemnulla aldeterminánst, és mutassuk meg, hogy a nagyobb méretű aldeterminánsok értéke 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg A determinánsát! Hogyan lehet ezt általánosítani $n \times n$-es mátrixra? (Ötlet: adjuk az összes sort az elsőhöz, utána vonjuk ki minden oszlopból az előzőt, hátulról előrefelé.)

7*. Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix rangjától függően mennyi a rangja az $\operatorname{adj} A$ mátrixnak, azaz annak a mátrixnak, amelynek az (i,j) indexű helyén az A mátrix (j,i) indexű előjeles aldeterminánsa áll?