Gyakorló feladatok

1. Legyenek $B = \begin{bmatrix} I & A \\ I & 2A \end{bmatrix}$ és $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix}$ 4×4-es blokkmátrixok, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Számítsuk ki a BC szorzatot és ennek segítségével a B determinánsát!

2. Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ páronként merőleges nemnulla vektorok $\mathbb{R}^n$-ben.

a) Mi a $\mathbf{v}_i$ vektorok skaláris szorzata az $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{v}_j$-vel, ahol $\lambda_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$?

b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek!

3. Adjuk meg az

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 6 \end{array}$$

valós egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen megoldását, és ennek felhasználásával írjuk fel az összes megoldást!

4. Legyen $W \leq \mathbb{R}^3$ altér, melynek generátorrendszere $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$.

a) Adjuk meg $W^\perp$ egy bázisát.

b) Határozzuk meg W altérre való merőleges vetítés mátrixát báziscserével és anélkül, azaz használva az $A(A^TA)^{-1}A^T$ képletet.

c) Bontsuk fel a $\mathbf{v} = (1,1,1)$ vektort W-beli és $W^\perp$-beli összetevők összegére!

5. Legyen $\mathbb{R}^n = U \oplus W$, ahol U bázisa $\mathcal{B}$ és W bázisa $\mathcal{C}$, legyenek továbbá a B mátrix oszlopai a $\mathcal{B}$, a C mátrix oszlopai pedig a $\mathcal{C}$ elemei.

a) Lássuk be, hogy a W mentén U-ra való vetítésnek, azaz az $f : \mathbf{u} + \mathbf{w} \mapsto \mathbf{u}$ $(\mathbf{u} \in U,\ \mathbf{w} \in W)$ lineáris leképezésnek a mátrixa $P = [B|0][B|C]^{-1}$.

b) Alkalmazzuk ezt a képletet az $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}((1,0,1),(1,1,0)) \oplus \operatorname{span}((1,1,1))$ direkt felbontás első, illetve második komponensére való vetítés mátrixának meghatározására!

c) Oldjuk meg a b) feladatot báziscserével is!

6. Határozzuk meg az $x - y = 1,\ x - y = 2$ ellentmondásos lineáris egyenletrendszer optimális közelítő megoldásait normálegyenlet segítségével! Határozzuk meg az egyetlen sortérbe eső (minimális abszolútértékű) optimális közelítő megoldást!

7. (Lineáris regresszió) Legyen $y = a + bx$ ismeretlen egyenes. Három mérési eredmény szerint $(1,1), (2,3), (4,6)$ az egyenesen lévő (x_i, y_i) pontok mért koordinátái. Keressük a legjobban közelítő megoldást (a,b)-re normálegyenlet segítségével! (A sorai $(1, x_i)$-k, b sorai y_i-k)

8. Határozzuk meg a következő mátrixok pszeudoinverzét!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

9. Mutassuk meg, hogy általában nem igaz, hogy $(AB)^+$ egyenlő lenne B^+A^+-szal. Tekintsük az $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixokat!

10. Oldjuk meg a 6. feladatot az együtthatómátrix pszeudoinverzével való beszorzással is!