Gyakorló feladatok

1. *a) Bizonyítsuk be, hogy egy rendezett halmaz akkor és csak akkor jólrendezett, ha nincs benne végtelen, szigorúan leszálló lánc!*

b) Mutassuk meg, hogy jólrendezett halmaz minden részhalmaza jólrendezett!

c) Bizonyítsuk be, hogy ha egy rendezett halmaz véges sok jólrendezett részhalmazának az uniója, akkor maga is jólrendezett!

d) Tegyük fel, hogy az A rendezett halmaz az $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ jólrendezett halmazok uniója, és ha $x \in A_i$, $y \in A_j$, $i < j$, akkor $x < y$. Lássuk be, hogy ekkor A jólrendezett! Adjunk meg $\mathbb{R}$-ben ilyen rendezésű részhalmazt!

e) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}$ nem jólrendezett a szokásos rendezésével, és adjunk meg rajta egy másik rendezést, ami jólrendezés!

Megoldás: a) Ha jólrendezett, akkor nem lehet benne végtelen, szigorúan leszálló lánc, mert annak semelyik eleme nem legkisebb. Most tegyük fel, hogy a halmaz nem jólrendezett, azaz van benne egy nemüres H részhalmaz, amelynek nincs legkisebb eleme. Legyen $h_1 \in H$ tetszőleges. Mivel nem legkisebb H-ban, $\exists h_2$, hogy $h_1 > h_2$. Ha már kiválasztottunk egy $h_1 > h_2 > \ldots > h_n$ sorozatot, ennek az utolsó eleme sem lehet legkisebb H-ban, így folytathatjuk a sorozatot h_{n+1}-gyel. Ilyen módon találunk egy végtelen, szigorúan leszálló láncot.

b) A részhalmaz minden nemüres részhalmaza a nagynak is részhalmaza, tehát nincs legkisebb eleme.

c) Legyen $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, és $H \subseteq A$. Ha valamely i-re $H \cap A_i \neq \emptyset$, akkor legyen h_i ennek a legkisebb eleme (ilyen létezik, mert A_i jólrendezett). Legyen e közül a véges sok elem közül h a legkisebb. Ekkor $h \leq h_i$ minden i-re, amire létezik h_i, és így tetszőleges $x \in H$-ra $x \in A_i \cap H$ valamely i-re, amiből $h \leq h_i \leq x$, azaz $h \leq x$ következik.

d) Legyen $H \subseteq A$ nem üres, és tekintsük a $B := \{\, i \mid H \cap A_i \neq \emptyset \,\} \subseteq \mathbb{N}$ halmazt. Ekkor B nem üres, mert $\emptyset \neq H \subseteq \bigcup_i A_i$. Legyen i_0 a B legkisebb eleme, és h a $H \cap A_{i_0}$ legkisebb eleme (ilyen van, mert A_{i_0} jólrendezett, és $H \cap A_{i_0}$ nem üres). Ekkor h a H legkisebb eleme, ugyanis i_0 választása alapján minden $x \in H$ olyan A_j-be esik, amelyre $i_0 \leq j$, és ha $i_0 = j$, akkor $h \leq x$, mivel h a legkisebb $H \cap A_{i_0}$-ban, ha pedig $i_0 < j$, akkor $h < x$, mivel A_{i_0} minden eleme kisebb A_j minden eleménél a feltevések szerint.

Megjegyzés: Nem kell eleve feltetnni, hogy A rendezett, a feltételek (A_i-ken belül megadott jólrendezések, és a különböző A_i-k elemei közötti kapcsolat könnyen ellenőrizhetően rendezést ad, ha A az A_i-k diszjunkt uniója. Továbbá az indexhalmaz lehet tetszőleges jólrendezett halmaz az $\mathbb{N}^+$ helyett.

e) Ha a $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$ sorozat elemeit a tagok indexe szerint rendezzük, akkor az $\mathbb{N}_0$ rendezésének megfelelő rendezett halmazt kapunk, tehát jólrendezett lesz.

2. *Igazoljuk, hogy*

a) $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$

b) $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

Megoldás: a) Ha $\lfloor x \rfloor = a$, akkor $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ és $\lfloor 2x \rfloor$ is kétféle lehet, aszerint, hogy x törtrésze a $[0, 1)$ intervallum melyik részébe esik.

Ha $a \leq x < a + \frac{1}{2}$, akkor $a < a + \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} < a + 1 \Rightarrow \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = a$, és
$2a \leq 2x < 2a + 1 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 2a$,

tehát $\lfloor x\rfloor + \lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor = 2a = \lfloor 2x\rfloor$.
Ha $a+\frac{1}{2} \le x < a+1$, akkor $a+1 \le x+\frac{1}{2} < a+\frac{3}{2} < a+2 \Rightarrow \lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor = a+1$, és $2a+1 \le 2x < 2a+2 \Rightarrow \lfloor 2x\rfloor = 2a+1$,
tehát $\lfloor x\rfloor + \lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor = 2a+1 = \lfloor 2x\rfloor$.

b) $a \in \mathbb{Z}$-re $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = a \Leftrightarrow a \le \sqrt{x} < a+1 \Leftrightarrow a^2 \le x < (a+1)^2 \Leftrightarrow a^2 \le \lfloor x\rfloor < (a+1)^2$ $\Leftrightarrow a \le \sqrt{\lfloor x\rfloor} < a+1 \Leftrightarrow \left\lfloor\sqrt{\lfloor x\rfloor}\right\rfloor = a$.

3. *Határozzuk meg az első n Fibonacci-szám összegét!*

Megoldás: Legyen $s_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_n$. Ekkor $s_n + s_{n+1} = (f_0 + \ldots + f_n) + (f_0 + \ldots + f_{n+1}) = f_0 + (f_0 + f_1) + \ldots + (f_n + f_{n+1}) = f_0 + f_2 + f_3 + \ldots + f_{n+2} = s_{n+2} - 1$. Ez könnyen visszavezethető egy Fibonacci-rekurzióra: $(s_n+1) + (s_{n+1}+1) = s_{n+2}+1$. Mivel $s_0+1 = 1 = f_2$ és $s_1+1 = 2 = f_3$, az (s_n+1) sorozat a Fibonacci-sorozatnak részsorozata: $s_n = f_{n+2} - 1$.
Megjegyzés: Azzal is kezdhettük volna, hogy kiszámolunk néhány értéket: $1, 2, 4, 7, 12, 20, \ldots$, megsejtjük, hogy ez az $s_n = f_{n+2} - 1$ sorozat ($n \in \mathbb{N}_0$), és ezt teljes indukcióval bizonyítjuk.

5. *Legyen $g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$, $g_0 = a$, $g_1 = b$ (általánosított Fibonacci-sorozat). Igazoljuk, hogy $g_n = af_{n-1} + bf_n$.*

Megoldás: A képletnek $n = 1$-től kezdve van értelme. $g_1 = b = a\cdot 0 + b\cdot 1$, és $g_2 = a+b = a\cdot 1 + b\cdot 1$, tehát $n = 1, 2$-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely $n \ge 2$-ig teljesül az egyenlőség. Ekkor
$g_{n+1} = g_n + g_{n-1} = (af_{n-1} + bf_n) + (af_{n-2} + bf_{n-1}) = a(f_{n-1} + f_{n-2}) + b(f_n + f_{n-1}) = af_n + bf_{n+1}$, tehát a következő tagra is teljesül.

6. *Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1$.

Megoldás: $n = 0$-ra igaz: $0\cdot 0! = 0 = 1! - 1$. Tegyük fel, hogy valamely n-re igaz. Ekkor $\sum\limits_{k=0}^{n+1} k\cdot k! = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} k\cdot k!\right) + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1$, tehát $(n+1)$-re is teljesül.

7. *Írjuk fel a $\sqrt{3}$ számot lánctört alakban! Számítsuk ki az ebből kapott első négy közelítő racionális számot és a közelítés hibáját. ($\sqrt{3} \approx 1{,}732$.) Jól közelítenek-e ezek a számok az irracionális számok approximációs tétele értelmében (azaz teljesül-e, hogy $|\sqrt{3} - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$)?*
Megoldás:

$$\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3}-1) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{3}-1)}}.$$

Itt újra a $(\sqrt{3}-1)$-et kell alakítani, tehát innentől kezdve periodikus a lánctört, és a törtvonal bal oldalán levő egész számok rendre $1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots$.

A végtelen lánctörtből úgy kapunk közelítő racionális számokat, hogy az $(n+1)$-edik törtvonallal elválasztott (alul végtelen) törtet kitöröljük. Az első négy ilyen a következő:

$$1, \qquad 1+\frac{1}{1}=2, \qquad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{5}{3}, \qquad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}}=\frac{7}{4}$$

Az 1 nevezőjűek $\frac{1}{1^2}=1$-nél jobban közelítenek, a 3 nevezőjű $1,666\ldots$ szám eltérése $\sqrt{3}$-tól kisebb, mint $1,74-1,66=0,08<\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}$, a 4 nevezőjűé kisebb, mint $1,75-1,73=0,02=\frac{1}{50}<\frac{1}{16}=\frac{1}{4^2}$. Tehát ezek mind rendelkeznek az irracionális számok approximációs tételében szereplő tulajdonsággal.