Bevezetés az algebrába 1 **2. feladatsor** *2019. szeptember 16.*

Gyakorló feladatok

1. *Horner-módszerrel helyettsítsük be 5-öt a $p(x) = x^5 - 3x^2 + x + 3$ polinomba!*

Megoldás:

	1	0	0	−3	1	3
5	1	5	25	122	611	3058

$\Rightarrow \qquad p(5) = 3058$

2. *Adjuk meg 120201_3-at tízes számrendszerben Horner módszerrel!*

Megoldás:

	1	2	0	2	0	1
3	1	5	15	47	141	424

$\Rightarrow \qquad 120201_3 = 424_{10}.$

3. *a) Váltsuk át 26-ot $10, 16, 8, 4, 2, 5, 26$ alapú számrendszerbe!*
b) Váltsuk át 1001-et 2-es, 8-as és 16-os számrendszerbe!

Megoldás: a) Ismételt leosztásokkal, és a maradékok fordított sorrendben való felírásával:

$$\overset{10}{\begin{array}{r|l} 26 & 6 \\ 2 & 2 \end{array}} \quad \overset{16}{\begin{array}{r|l} 26 & 10 \\ 1 & 1 \\ 0 & \end{array}} \quad \overset{8}{\begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ 3 & 3 \\ 0 & \end{array}} \quad \overset{4}{\begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ 6 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & \end{array}} \quad \overset{2}{\begin{array}{r|l} 26 & 0 \\ 13 & 1 \\ 6 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & \end{array}} \quad \overset{5}{\begin{array}{r|l} 26 & 1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & \end{array}} \quad \overset{26}{\begin{array}{r|l} 26 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & \end{array}}$$

26 a megadott számrendszerekben:

$$26_{10} = 1A_{16} = 32_8 = 122_4 = 11010_2 = 101_5 = 10_{26}.$$

b) A b alapú számrendszerből b^m alapúba való átváltást a számjegyek csoportosításával (jobbról balra m tagú csoportokba) és a csoportok átváltásával, a b^m alapú számrendszerről b alapú számrendszerre való átváltást az egyes számjegyek átváltásával el lehet végezni, ugyanis egy a b-es számrendszerben n-jegyű c számra és $k = \lceil n/m \rceil$-re
$c = a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + \ldots + a_1 b + a_0 = (a_{km-1}b^{m-1} + \ldots + a_{km-m+1}b + a_{k(m-1)})b^{(k-1)m} + \ldots + (a_{2m-1}b^{m-1} + \ldots + a_{m+1}b + a_m)b^m + (a_{m-1}b^{m-1} + a_1 b + \ldots + a_0)$,
ahol $a_i := 0$, ha $i \geq n$, és itt $0 \leq a_{im-1}b^{m-1} + \ldots + a_{im-m+1}b + a_{(i-1)m} < b^m$.
Érdemes a 8-as számrendszerrel kezdeni, és abból átváltani.

$$\overset{8}{\begin{array}{r|l} 1001 & 1 \\ 125 & 5 \\ 15 & 7 \\ 1 & 1 \\ 0 & \end{array}}$$

$1001 = 1751_8 = 1|111|101|001_2 = 11|1110|1001_2 = 3E9_{16}.$

4. *Határozzuk meg euklideszi algoritmussal* $(288, 204)$*-et, és állítsuk elő a legnagyobb közös osztót* $288x + 204y$ *alakban alkalmas* $x, y \in \mathbb{Z}$*-vel!*

Megoldás:

		288	204
	288	1	0
$-1\cdot$	204	0	1
$-2\cdot$	84	1	-1
$-2\cdot$	36	-2	3
$-3\cdot$	12	5	-7
	0		

Így $(288, 204) = 12 = 288 \cdot 5 + 204 \cdot (-7)$.

5. *Megoldhatók-e az alábbi diofantoszi egyenletek? Ha igen, adjuk meg az összes megoldásukat, illetve az összes nemnegatív megoldásukat!*
a) $288x + 204y = 1$
b) $288x + 204y = 300$
c) $288x + 204y = 3000$

Megoldás: a) Nem oldható meg, mert $(288, 204)$ nem osztója 1-nek (számolás nélkül is látszik, hogy a legnagyobb közös osztó páros).

b) Mivel $(288, 204) = 12 \mid 300$, a diofantoszi egyenlet megoldható, és egyik megoldását megkaphatjuk a 12 előállításának megfelelő többszöröseként: $(x_0, y_0) = (125, -175)$. De akár a 288 és a 12 előállításának az összegeként is kaphatunk egy megoldást: $(6, -7)$. Ebből az összes megoldás felírható: $(6 + \frac{204}{12}t,\ -7 - \frac{288}{12}t) = (6 + 17t,\ -7 - 24t)$, ahol $t \in \mathbb{Z}$ tetszőleges. Nemnegatív megoldása nyilván nincs, mert a nemnegatív kombinációk közül csak 0, 204 és 288 nem nagyobb 300-nál.

c) A b) rész megoldása alapján $(60, -70)$ egy megoldás, és az általános megoldás $(60 + 17t, -70 - 24t)$. Ez nemnegatív, ha $t \geq -\frac{60}{17} = -3\frac{9}{17}$, és $t \leq -\frac{70}{24} = -2\frac{22}{24}$, és ennek csak a $t = -3$ a megoldása. Vagyis ennek a diofantoszi egyenletnek az egyetlen nemnegatív megoldása $(9, 2)$.

6. *Legyen* $x \in \mathbb{R}^+$ *és* $d \in \mathbb{N}^+$*. Mutassuk meg, hogy az* x*-nél nem nagyobb,* d*-vel osztható pozitív egészek száma* $\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor$.

Megoldás: $\{\, n \in \mathbb{N}^+ \mid dn \leq x \,\} = \left\{ n \in \mathbb{N}^+ \;\middle|\; n \leq \frac{x}{d} \right\}$, és az utóbbi éppen a legnagyobb n, amelyre $n \leq \frac{x}{d}$.

7. *Bizonyítsuk be, hogy* n, a, b *pozitív egészekre* $\left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor$.

Megoldás: Az előző feladat szerint a bal oldali kifejezés az ab azon pozitív egész többszöröseinek száma, amelyek nem nagyobbak n-nél. Viszont $m \in \mathbb{N}^+$-ra $mab \leq n \Leftrightarrow mb \leq \frac{n}{a} \Leftrightarrow mb \leq \lfloor \frac{n}{a} \rfloor \Leftrightarrow m \leq \frac{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor}{b}$, és az ilyen m-ek száma éppen $\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor$.

8. *Bizonyítsuk be, hogy minden $a > 1$, $m, n \geq 1$ egész számra* $(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$.

Megoldás: Az állítást $m + n$-re vonatkozó teljes indukcióval látjuk be. $m + n = 2$ esetén $m = n = 1$, és $(a^1 - 1, a^1 - 1) = (a - 1, a - 1) = a - 1 = a^{(1,1)} - 1$. Tegyük fel, hogy valamely $m, n \geq 1$ esetén a kisebb összegű párokra már beláttuk az állítást. Feltehetjük, hogy $m \geq n$. Ekkor $(a^m - 1, a^n - 1) = (a^m - 1 - a^{m-n}(a^n - 1), a^n - 1) = (a^{m-n} - 1, a^n - 1)$, és az utóbbi az indukciós feltevés szerint $= (a^{(m-n,n)} - 1, a^n - 1) = (a^m - 1, a^n - 1)$.