Gyakorló feladatok

1. *Számítsuk ki az $1-2i$ komplex szám négyzetgyökeit (trigonometrikus alak használata nélkül)!*

Megoldás: Keressük meg azt a $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ számot, amelyre $(x + yi)^2 = 1 - 2i$, azaz $x^2 - y^2 + 2xyi = 1 - 2i$. Az algebrai alak egyértelműsége miatt ez ekvivalens az $x^2 - y^2 = 1,\ \ 2xy = -2$ egyenletrendszerrel. A második egyenletből $y = -\frac{1}{x}$, és ezt az elsőbe helyettesítve az

$$x^4 - x^2 - 1 = 0$$

egyenletet kapjuk. Ebből $x^2 = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, de $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$, tehát csak az $x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ megoldás jó, amiből

$$x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \text{ és } y = -\frac{1}{x} \ \Rightarrow\ z = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right).$$

2. *Számítsuk ki $-\sqrt{3}+i$ ötödik gyökeit!*

Megoldás: $z = -\sqrt{3} + i$-re $|z| = 2$, és így $z = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2(\cos 150° + i \sin 150°)$, vagy radiánban $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.
Így az ötödik gyökök

$$\sqrt[5]{2}\big(\cos(30° + k\cdot 72°) + i\sin(30° + k\cdot 72°)\big) \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4), \quad \text{vagy radiánban}$$

$$\sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{5}\right)\right) \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

3. *a) Határozzuk meg az $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots$ összeg értékét az $(1+i)^n$ algebrai és trigonometrikus alakjának az összehasonlításával!*

b) Számítsuk ki a $(\cos x + i\sin x)^3$ kifejezést kétféle módon! Ennek segítségével fejezzük ki $\cos(3x)$-et $\cos x$ függvényében!

Megoldás: a) $(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k$, másrészt $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^n = 2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$. Az elsőnek a valós része a páros indexű tagokból áll. Ha ezt összevetjük a trigonometrikus alakkal, azt kapjuk, hogy

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots = \sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m\binom{n}{2m} = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

Esetszétválasztással szebb alakra is hozhatjuk:

$$\begin{cases} 0 & \text{ha } n \equiv 2 \pmod 4 \\ 2^{n/2} & \text{ha } n \equiv 0 \pmod 8 \\ -2^{n/2} & \text{ha } n \equiv 4 \pmod 8 \\ 2^{(n-1)/2} & \text{ha } n \equiv 1, 7 \pmod 8 \\ -2^{(n-1)/2} & \text{ha } n \equiv 3, 5 \pmod 8 \end{cases}$$

b) A trigonometrikus alakban végzett hatványozással

$$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos(3x) + i\sin(3x),$$

a binomiális tétel szerint pedig

$$(\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + i3\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x.$$

A két kifejezés valós részét összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

4. *Adjuk meg annak a négyzetnek a másik két csúcsát, melynek két átellenes csúcsát két adott komplex szám, z_1 és z_2 alkotják!*

Megoldás: A négyzet középpontja $\frac{z_1+z_2}{2}$, a másik két csúcsot pedig megkaphatjuk a z_1-nek a középpont körüli $\pm 90°$ fokos elforgatásával. Mivel az origó körüli $90°$-os forgatás az $i = \cos 90° + i\sin 90°$ számmal való szorzás, a két csúcs:

$$\left(z_1 - \frac{z_1+z_2}{2}\right) i + \frac{z_1+z_2}{2} = z_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) + z_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right),$$

$$\left(z_1 - \frac{z_1+z_2}{2}\right)(-i) + \frac{z_1+z_2}{2} = z_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) + z_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right),$$

5. *Ha ε primitív n-edik egységgyök, mi lehet a rendje*
a) $-\varepsilon$-nak;
b) ε^k-nak?

Megoldás: $\varepsilon = \cos\frac{m}{n}2\pi + i\sin\frac{m}{n}2\pi$, ahol $(m,n)=1$.

a) $-\varepsilon = (-1)\varepsilon = (\cos\pi + i\sin\pi)\left(\cos\frac{m}{n}2\pi + i\sin\frac{m}{n}2\pi\right) =$
$= \cos\left(\pi + \frac{m}{n}2\pi\right) + i\sin\left(\pi + \frac{m}{n}2\pi\right)$, tehát olyan 1 abszolút értékű komplex szám, amelynek szöge $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{m}{n}\right)2\pi = \dfrac{n+2m}{2n}2\pi$. Azt kell csak megállapítani, hogy mi a nevezője az $\dfrac{n+2m}{2n}$ számnak az egyszerűsített alakjában. Páratlan prímmel nem lehet egyszerűsíteni, mert az a nevező miatt osztója lenne n-nek is, és akkor a számláló miatt $2m$-nek, így m-nek is, tehát n és m nem lennének relatív prímek. 2-vel akkor lehet egyszerűsíteni, ha n páros. Ilyenkor a nevező 4-gyel is osztható, de m páratlan, így $2m \equiv 2 \pmod 4$. Tehát 4-gyel csak akkor lehet egyszerűsíteni, ha $n \equiv 2 \pmod 4$. Viszont ekkor a nevező 8-cal már nem osztható, tehát 8-cal semmiképpen nem tudunk egyszerűsíteni.

összefoglalva:

$$-\varepsilon \text{ rendje } \begin{cases} 2n, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ n, & \text{ha } 4 \mid n, \text{ és} \\ \frac{n}{2}, & \text{ha } n \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$$

b) $(\varepsilon^k)^t = \varepsilon^{kt} = 1 \Leftrightarrow n \mid kt \Leftrightarrow \frac{n}{(k,n)} \mid \frac{k}{(k,n)}t \Leftrightarrow \frac{n}{(k,n)} \mid t$, mert $\left(\frac{n}{(k,n)}, \frac{k}{(k,n)}\right) = 1$. Tehát ε^k rendje, azaz a legkisebb pozitív t, amelyre $(e^k)^t = 1$, $t = \frac{n}{(k,n)}$.

6. *Adjuk meg a primitív 5-ödik és a primitív 8-adik egységgyökök összegét és szorzatát!*

Megoldás: A primitív ötödik egységgyökök $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$, ahol $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$. Így az összegük $\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4) - 1 = -1$, mert tudjuk, hogy minden $n > 1$-re az n-edik egységgyökök összege 0. A szorzatuk $\varepsilon^{1+2+3+4} = \varepsilon^{10} = 1$.

A nyolcadik primitív egységgyökök $\varepsilon, \varepsilon^3, \varepsilon^5, \varepsilon^7$, ahol $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$. Az összegük $\varepsilon(1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^6) = 0$, mert $1, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^6$ éppen a 4-edik egységgyökök, a szorzatuk pedig $\varepsilon^{1+3+5+7} = \varepsilon^{16} = 1$.

7. *Osszuk el maradékosan az $x^4 - 2x + 5$ polinomot*

a) $x^2 - x + 2$*-vel,*

b) $x + 1$*-gyel,*

c) $(x + 1)^2$*-nel!*

d) $(x^2 - 1)$*-gyel!*

Megoldás: a)

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(x^4 & & & -2x & +5) & : (x^2 - x + 2) \ = x^2 + x - 1 \\
-(x^4 & -x^3 & +2x^2) & & & \\
\hline
& x^3 & -2x^2 & -2x & +5 & \\
& -(x^3 & -x^2 & +2x) & & \\
\hline
& & -x^2 & -4x & +5 & \\
& & -(-x^2 & +x & -2) & \\
\hline
& & & -5x & +7 &
\end{array}
$$

Tehát $x^4 - 2x + 5 = (x^2 - x + 2)(x^2 + x - 1) + (-5x + 7)$.

b) Horner-módszerrel:

	1	0	0	-2	5
-1	1	-1	1	-3	8

Tehát $x^4 - 2x + 5 = (x + 1)(x^3 - x^2 + x - 3) + 8$.

c) A b) részben kiszámolt hányadost még egyszer eloszthatjuk $(x + 1)$-gyel a Horner-módszer segítségével: $x^3 - x^2 + x - 3 = (x + 1)(x^2 - 2x + 3) - 6$, és ezt behelyettesítve a negyedfokú polinom felírásába:

$x^4 - 2x + 5 = (x+1)((x+1)(x^2 - 2x + 3) - 6) + 8 = (x+1)^2(x^2 - 2x + 3) - (x+1)6 + 8 = (x + 1)^2(x^2 - 2x + 3) + (-6x + 2)$.

8. *Horner-módszer alkalmazásával írjuk fel az $x^3 + 2x^2 + 1$ polinomot $(x - 3)$ hatványai szerint rendezve!*

Megoldás: Addig osztjuk maradékosan $(x - 3)$-mal az előző osztás maradékát, amíg a hányados konstans nem lesz. Ekkor ez a konstans hányados és a maradékok fordított sorrendben éppen az $(x - 3)$ hatványainak az együtthatóit adják.

	1	2	0	1
3	1	5	15	**46**
3	1	8	**39**	
3	**1**	**11**		

Tehát $x^3 + 2x^2 + 1 = (x - 3)^3 + 11(x - 3)^2 + 39(x - 3) + 46$.