Gyakorló feladatok

1. *Határozzuk meg $x^3 - 2x^2 + x - 1$ és $x^2 + 2$ legnagyobb közös osztóját, és állitsuk elő a legnagyobb közös osztót ezen polinomok polinomegyütthatós lineáris kombinációjaként a kibővített euklideszi algoritmus segítségével!*

Megoldás: Az $x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x^2 + 2)(x - 2) + (-x + 3)$ és $x^2 + 2 = (-x + 3)(-x - 3) + 11$ maradékos osztásokat követve:

	$x^3 - 2x^2 + x - 1$	$x^2 + 2$
$x^3 - 2x^2 + x - 1$	1	0
$x^2 + 2$	0	1
$-x + 3$	1	$-x + 2$
11	$x + 3$	$-x^2 - x + 7$

Tehát $11 = (x + 3)(x^3 - 2x^2 + x - 1) + (-x^2 - x + 7)(x^2 + 2)$, azaz
$1 = \frac{1}{11}(x + 3)(x^3 - 2x^2 + x - 1) + \frac{1}{11}(-x^2 - x + 7)(x^2 + 2)$.

2. *Határozzuk meg az alábbi polinomok gyökeit, és bontsuk fel a polinomokat irreducibilis tényezők szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{Z}_5[x]$-ben!*

a) $2x^3 - 7x^2 + 2$
b) $x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$
c) $x^5 + 1$

Megoldás: a) A racionális gyökteszt szerint az $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2$ polinomnak racionális gyöke csak ± 1, ± 2 vagy $\pm\frac{1}{2}$ lehet. Behelyettesítéssel könnyen látjuk, hogy ezek közül csak az utolsó, $-\frac{1}{2}$ lesz valóban gyök. Horner-módszerrel leosztva azt kapjuk, hogy $f(x) = (x + \frac{1}{2})(2x^2 - 8x + 4) = (2x + 1)(x^2 - 4x + 2)$. A másodfokú tényező gyökei $2 \pm \sqrt{2}$, tehát $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{C}[x]$-ben is az irreducibilisekre való felbontása $f(x) = (2x + 1)(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$. A $(2x + 1)(x^2 - 4x + 2)$ felbontás $\mathbb{Z}_5$ fölött is valódi felbontást ad, és a másodfokú tényezőnek itt nincs gyöke ($0, 1, 2, 3, 4$ közül egyiknek a behelyettesítése sem ad 0-t modulo 5, vagy teljes négyzetté való kiegészítéssel is láthatjuk, hogy $x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2 - 2$-nek nem lehet gyöke, mert 2 nem négyzetszám modulo 5). Tehát $x^2 - 4x + 2$ irreducibilis $\mathbb{Z}_5[x]$-ben, és így ott a $(2x + 1)(x^2 - 4x + 2)$ az irreducibilisekre bontás.

b) A racionális gyökteszt szerint az $f(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 6x - 3$ polinomnak racionális gyöke csak ± 1 vagy ± 3 lehet. Könnyen látható, hogy 1 valóban gyök. Emeljük ki $(x - 1)$-et Horner-módszerrel! A hányadosnak is gyöke az 1, ezért tovább osztjuk.

	1	−2	−1	4	−5	6	−3
1	1	−1	−2	2	−3	3	0
1	1	0	−2	0	−3	0	

$f(x) = (x-1)^2(x^4-2x^2-3) = (x-1)^2(x^2-3)(x^2+1) = (x-1)^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+1)$ az $\mathbb{R}$ fölötti felbontás, mert $x^2 + 1$ irreducibilis (másodfokú, és nincs valós gyöke).
$\mathbb{C}$ fölött tovább bontható: $f(x) = (x - 1)^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - i)(x + i)$.

c) $x^5 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi \Leftrightarrow x = \cos\left(\frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5}\right)$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$.
A komplex gyöktényezős felbontásból megkapjuk a valósat a konjugált tényezők párosításával:
$x^5 + 1 = (x - (\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}))(x - (\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}))(x - (\cos\pi + i\sin\pi))\cdot$
$\cdot(x - (\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}))(x - (\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5})) =$
$(x+1)\left(x^2 - 2\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)x + 1\right)\left(x^2 - 2\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right)x + 1\right)$.

3. *Adjuk meg $\mathbb{Z}_2$ és $\mathbb{Z}_3$ fölött az irreducibilis másodfokú polinomokat!*

Megoldás: $\mathbb{Z}_2$ fölött összesen négy másodfokú polinom van. Ha irreducibilis, akkor a konstans tag nem lehet 0, hogy a 0 ne legyen gyök, és az együtthatók összege sem 0, hogy az 1 ne legyen gyök. Az egyetlen lehetőség az $x^2 + x + 1$, és ez valóban irreducibilis, mert másodfokú, és nincs gyöke.
$\mathbb{Z}_3$ fölött elég az 1 főegyütthatós irreducibiliseket megkeresni, a többi irreducibilis ezeknek a -1-szerese. A konstans tag itt sem lehet 0, tehát hatféle lehetőségünk van az együtthatók megválasztására. Ha a konstans tag 1, akkor a középső sem 1, sem -1 nem lehet, mert akkor 1, illetve -1 gyöke lenne a polinomnak. Az $x^2 + 1$ polinom viszont valóban irreducibilis. Ha a konstans tag -1, akkor a középső nem lehet 0, de $x^2 + x - 1$ és $x^2 - x - 1$ mindegyike irreducibilis. Így az 1 főegyütthatós irreducibilis polinomok $\mathbb{Z}_3[x]$-ben $x^2 + 1$, $x^2 + x - 1$ és $x^2 - x - 1$.

4. *Adjuk meg azt a legalacsonyabb fokú 1 főegyütthatós*
a) komplex együtthatós
b) valós együtthatós
polinomot, amelynek i kétszeres, 1 háromszoros gyöke!

Megoldás: a) $(x - i)^2(x - 1)^3$
b) Ha i kétszeres gyöke egy valós polinomnak, akkor $-i$ is az, tehát a polinom legalább hetedfokú, és az $(x - i)^2(x + i)^2(x - 1)^3 = (x^2 + 1)^2(x - 1)^3$ valóban ilyen polinom.

5. *Határozzuk meg az $(x - 2)^2(x + i)^5(x - 3)(x - 4)^2$ és az $(x - 2)(x + i)^2(x - 3)^3$ polinomok legnagyobb közös osztóját!*

Megoldás: $(x - 2)(x + i)^2(x - 3)$.

6. *Mutassuk meg, hogy páratlan fokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke!*

Megoldás: Mivel a páratlan fokú polinom mint valós függvény $-\infty$-ben $-\infty$-hez tart, $+\infty$-ben pedig $+\infty$-hez, a függvény negatív és pozitív értéket is felvesz, és így a Bolzano-tétel miatt a 0-t is felveszi.
Az algebra alaptételéből is következik az állítás, mert a nem valós gyökök és a konjugáltjuk ugyanolyan multiplicitású gyökei a polinomnak, és multiplicitással együtt páratlan sok gyöke van, tehát kell lennie valós gyöknek is.

7. *Határozzuk meg az a együtthatót úgy, hogy -1 legalább kétszeres gyöke legyen az*

$$x^5 - ax^2 - ax + 1$$

polinomnak!

Megoldás: $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$-nek gyöke a -1: $f(-1) = -1 - a + a + 1 = 0$. Emeljük ki $(x+1)$-et!

	1	0	0	$-a$	$-a$	1
-1	1	-1	1	$-1-a$	1	0

$f(x) = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - (1+a)x + 1)$. Akkor lesz hányadosnak is gyöke a -1, ha $1 + 1 + 1 + 1 + a + 1 = 0$, azaz $a = -5$.

8. *Adjuk meg az alábbi polinomok komplex gyöktényezős alakját!*
a) $x^3 - 1$
b) $x^n + 1$
c) $x^4 + x^2 + 1$

Megoldás: a) $x^3 - 1 = (x-1)\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$.

b) $x^n + 1 = \dfrac{x^{2n} - 1}{x^n - 1}$, tehát $x^n + 1$ gyökei azok a $2n$-edik egységgyökök, amelyek nem n-edik egységgyökök. Ha ε primitív $2n$-edik egységgyök, akkor $x^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(x - \varepsilon^{2k+1})$.

c) $x^2 + x + 1 = \dfrac{x^6 - 1}{x^2 - 1} = (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)(x-\varepsilon^4)(x-\varepsilon^5)$, ahol $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ primitív 6-odik egységgyök.

9. *Mutassuk meg, hogy egy racionális együtthatós, $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis polinomnak nem lehet $\mathbb{C}$-ben többszörös gyöke!*

Megoldás: Legyen $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, ahol $\deg f \geq 1$. Ha f-nek van többszörös gyöke $\mathbb{C}$-ben, akkor $d(x) = (f(x), f'(x))$ nem konstans. De akkor $d(x) \mid f(x)$, tehát $f(x)$ felbonthatatlansága miatt $d(x) = cf(x)$ valamely $c \neq 0$ konstansra. Viszont $\deg d(x) \leq \deg f'(x) = \deg f(x) - 1$, ami ellentmondás.