Gyakorló feladatok

1. *Határozzuk meg azokat a $c \in \mathbb{Z}$ számokat, amelyekre az $x^3 + 2x^2 + cx + 4$ polinomnak van racionális gyöke!*

Megoldás: A racionális gyökteszt alapján ennek a polinomnak csak $\pm1, \pm2, \pm4$ közül lehetnek a racionális gyökei. Egyenként behelyettesítve ezeket, a c-re egy-egy lineáris egyenletet kapunk:
$c + 7 = 0$, $5 - c = 0$, $20 + 2c = 0$, $-2c + 4 = 0$, $100 + 4c = 0$, illetve $-28 - 4c = 0$. Mindgyiknek egész szám a megoldása, így a megfelelő c értékek: -7, 5, -10, 2, -25 (a -7 az 1-hez és a -4-hez is jó).

2. *Hány irreducibilis tényező szorzatára bomlik az $f(x) = -6x^3 + 6x^2 - 12$ polinom $\mathbb{Q}[x]$-ben, $\mathbb{Z}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben, illetve $\mathbb{C}[x]$-ben?*

Megoldás: A -6 kiemelése után racionális gyököket keresve megtaláljuk a -1-et, így az $f(x) = -6(x+1)(x^2-2x+2)$ felbontást kapjuk. Ez $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben is irreducibilisekre bontás, mert az $x^2 - 2x + 2$ másodfokú polinomnak nincs valós gyöke. Itt a -6 egység, tehát bármelyik tényezőhöz hozzárakható, ezért $f(x)$ két irreducibilis tényező szorzatára bomlik $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben is. $\mathbb{Z}[x]$-ben csak ±1 az egységek, így a 6-ot is faktorizálni kell: $f(x) = -2 \cdot 3(x + 1)(x^2 - 2x + 2)$ négy irreducibilis tényező szorzata. Végül $\mathbb{C}$ fölött az összes gyököt kiszámolva az $f(x) = -6(x + 1)(x - 1 - i)(x - 1 + i)$ felbontást kapjuk $\mathbb{C}[x]$-ben, ahol három irreducibilis tényező szerepel.

3. *Határozzuk meg az $f(x) = -6x^3 + 6x^2 - 12$ és a $g(x) = 3x^2 - 3x - 6$ polinomok legnagyobb (azaz kitüntetett) közös osztóját $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{Z}[x]$-ben!*

Megoldás: Mivel $f(x)$-et már az előbb faktorizáltuk, és $g(x)$-et is könnyű irreducibilis tényezőkre bontani: $g(x) = 3(x - 2)(x + 1)$, a legnagyobb közös osztót itt érdemes a közös irreducibilis tényezők szorzataként meghatározni. Ez $\mathbb{Q}[x]$-ben $x + 1$, $\mathbb{Z}[x]$-ben $3(x + 1)$.

4. *Irreducibilis-e az $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 3$ polinom $\mathbb{R}$ fölött, $\mathbb{Q}$ fölött és $\mathbb{Z}_2$ fölött?*

Megoldás: $\mathbb{R}$ fölött nyilván nem, mert $\mathbb{R}[x]$-ben minden irreducibilis polinom első vagy másodfokú. $\mathbb{Q}[x]$-ben irreducibilis a Schönemann–Eisenstein-kritérium alapján ($p = 3$-mal). $\mathbb{Z}_2[x]$-ben $f(x) = x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)^2$ nem irreducibilis.

5. *Bontsuk fel a*

$$2x^6 - x^5 - 9x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5x + 5$$

polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{Z}_5[x]$-ben!

Megoldás: A racionális gyökteszt alapján a polinom lehetséges racionális gyökei ±1 ±5, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{5}{2}$. Ebből 1 és $-\frac{1}{2}$ (egyszeres) gyökök:

	2	-1	-9	4	-6	5	5
1	2	1	-8	-4	-10	-5	0
$-\frac{1}{2}$	2	0	-8	0	-10	0	

a hányadosként kapott negyedfokú polinomot pedig x^2 polinomjaként egyszerű tovább faktorizálni:

$$(x-1)(x+\frac{1}{2})(2x^4-8x^2-10) = (x-1)(2x+1)(x^4-4x^2-5) = (x-1)(2x+1)(x^2-5)(x^2+1).$$

Ezek a tényezők irreducibilisek $\mathbb{Q}[x]$-ben, mert a másodfokú tényezőknek nincs racionális gyöke. $\mathbb{Z}_5[x]$-ben viszont mindkettő tovább bontható:

$$f(x) = (x-1)(2x+1)x^2(x^2-4) = (x-1)(2x-4)x^2(x-2)(x-2) = 2(x-1)(x-2)^2x^2(x+2).$$

6. *Határozzuk meg az $x^3 + 3x^2 + 9x + 5$ polinom gyökeit a Cardano-képlet segítségével!*

Megoldás: A négyzetes tagot kiküszöbölhetjük az $y = x + 1$ behelyettesítéssel: $(x^3+3x^2)+9x+5 = (x+1)^3 - 3x - 1 + 9x + 5 = (x+1)^3 + 6(x+1) - 2 = y^3 + 6y - 2$. Az y megoldást $u+v$ alakban keresve az $(u^3 + v^3 - 2) + (3uv + 6)(u + v) = 0$ egyenletet kapjuk, és erre még akkor is találunk megoldást, ha feltesszük, hogy mindkét tag 0, pontosabban, hogy $u^3 + v^3 = 2$, és $3uv = -6$. A $v = -\frac{2}{u}$ behelyettesítéssel az $u^6 - 2u^3 - 8 = 0$ egyenlethez jutunk, amelynek megoldása $u^3 = 4$ vagy -2, amiből $u = \sqrt[3]{4}$ vagy $-\sqrt[3]{2}$ (komplex köbgyökök). Ebből elég egyet kiválasztani, mondjuk, az $u = \sqrt[3]{4}$ valós köbgyököt, és a hozzá tartozó $v = \frac{-2}{u} = -\sqrt[3]{2}$ értéket, és ezekből az $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ primitív harmadik egységgyökkel az

$$\begin{aligned} y_1 =& \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} \\ y_2 =& \varepsilon\sqrt[3]{4} - \varepsilon^2\sqrt[3]{2} \\ y_3 =& \varepsilon^2\sqrt[3]{4} - \varepsilon\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

megoldást kapjuk, azaz

$$\begin{aligned} x_1 =& \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} - 1 \\ x_2 =& \varepsilon\sqrt[3]{4} - \varepsilon^2\sqrt[3]{2} - 1\,, \\ x_3 =& \varepsilon^2\sqrt[3]{4} - \varepsilon\sqrt[3]{2} - 1 \end{aligned}$$

vagy algebrai alakban kiírva:

$$\begin{aligned} x_1 =& \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} - 1 \\ x_2 =& -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})i\,. \\ x_2 =& -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})i \end{aligned}$$

7. *Lássuk be, hogy ha p páratlan prím, akkor $\Phi_{2p}(x) = \Phi_p(-x)$, és bizonyítsuk be ennek a polinomnak az irreducibilitását!*

Megoldás: $\varphi(2p) = (2-1)(p-1) = p-1 = \varphi(p)$, ezért a két polinom foka megegyezik. $\Phi_p(-x)$ gyökei a p-edik primitív egységgyökök negatívjai, és ezeknek a rendje $2p$, ugyanis ha ε rendje p, akkor $(-\varepsilon)^{2p} = (-1)^{2p}\varepsilon^{2p} = 1$, de $(-\varepsilon)^2 = \varepsilon^2 \neq 1$ és $(-\varepsilon)^p = -\varepsilon^p = -1 \neq 1$. Tehát $\Phi_p(-x)$ gyökei $p-1$ darab különböző $2p$-edik primitív egységgyök, csakúgy mint Φ_{2p} gyökei. Végül mindkét polinom főegyütthatója 1, mert $(-1)^{p-1} = 1$, tehát $\Phi_{2p}(x) = \Phi_p(-x)$.

$\Phi(x)$-ről bizonyítottuk, hogy irreducibilis ($\Phi_p(x+1) = \frac{(x+1)^p-1}{(x+1)-1}$ kielégíti a Schönemann–Eisenstein-kritériumot a megadott p-vel), ezért $\Phi(-x)$ is az.

8. *a) Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, és $a, b \in \mathbb{Z}$, akkor $a - b \mid f(a) - f(b)$.*
b) Keressünk olyan egész együtthatós polinomot, amelyre
$\{ f(-2), f(1), f(3) \} = \{ 2, 6, 11 \}$ *(nem feltétlenül ebben a sorrendben)!*

Megoldás: a) Legyen $f(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$. Ekkor $f(a) - f(b) = c_n(a^n - b^n) + \ldots + c_k(a^k - b^k) + \ldots + c_1(a - b)$, és $a - b$ osztója $(a^k - b^k)$-nak minden $k \geq 1$-re, így $a - b$ osztója $(f(a) - f(b))$-nek.
Vagy másképp:
$a \equiv b \pmod{(a-b)} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{(a-b)}\ \forall k \Rightarrow f(a) \equiv f(b) \pmod{(a-b)}$ a kongruenciák műveleti tulajdonságai miatt.

b) Az a) rész miatt $5 \mid (f(3) - f(-2)$, így $\{ f(3), f(-2) \} = \{ 6, 11 \}$, és
$3 \mid (f(1) - f(-2)) \Rightarrow \{ f(1), f(-2) \} = \{ 2, 11 \}$,
ezért $f(-2)$ a két halmaz metszetében van, amiből $f(-2) = 11$, $f(1) = 2$, $f(3) = 6$, vagy táblázatosan:

x_k	-2	1	3
$f(x_k)$	11	2	6

Newton-interpolációval x_1-en:
$f_0(x) = 11$. Ezt módosítva $\{ x_1, x_2 \}$-höz:
$f_1(x) = f_0(x) + A(x + 2)$, $x_2 = 1$-ben $2 = 11 + 3A \Rightarrow A = -3 \Rightarrow$
$f_1(x) = 11 - 3(x + 2) = -3x + 5$. $\{ x_1, x_2, x_3 \}$-hoz:
$f_2(x) = f_1(x) + A(x+2)(x-1) = -3x+5+A(x+2)(x-1)$, $x_3 = 3$-ban: $6 = -4+10A \Rightarrow A = 1 \Rightarrow$
$f_2(x) = -3x + 5 + (x + 2)(x - 1) = x^2 - 2x + 3$.
Tehát a legkisebb fokú olyan $f(x)$ polinom, amely kielégíti a feltételt,
$f(x) = x^2 - 2x + 3$.
Természetesen bármely $x^2 - 2x + 3 + A(x + 2)(x - 1)(x - 3)$ megfelel, ahol $A \in \mathbb{Z}$.
Lagrange-interpolációval:
Az alappolinomok
$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(-2-1)(-2-3)} = \frac{1}{15}x^2 - \frac{4}{15}x + \frac{1}{5}$, $\quad L_2(x) = \frac{(x+2)(x-3)}{(1+2)((1-3)} = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + 1$,
$L_3(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{(3+2)(3-1)} = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{5}$, így az interpoláló polinom
$f(x) = 11L_1(x) + 2L_2(x) + 6L_3(x) = x^2 - 2x + 3$.

9. *Legyenek a, b, c az $x^3 - 2x^2 + 4x + 6$ polinom gyökei $\mathbb{C}$-ben. Adjunk meg egy harmadfokú polinomot, amelynek gyökei $a + b$, $a + c$ és $b + c$. (Ne számítsuk ki a gyököket, használjuk a gyökök és együtthatók közti összefüggéseket!*

Megoldás: A Viète-formulákból tudjuk, hogy $a + b + c = 2$, $ab + ac + bc = 4$ és $abc = -6$.
Az új polinom $x^3 + px^2 + qx + r$, ahol
$-p = ((a + b) + (a + c) + (b + c)) = 2(a + b + c) = 4$,
$q = (a + b)(a + c) + (a + b)(b + c) + (a + c)(b + c)) = a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + ac + bc) = (a + b + c)^2 + (ab + ac + bc) = 8$, és
$-r = (a + b)(a + c)(b + c) = a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b + 2abc = (ab + ac + bc)(a + b + c) - abc = 8 + 6 = 14$.
Tehát a keresett polinom $x^3 - 4x^2 + 8x - 14$.