Gyakorló feladatok

1. *Válasszunk ki az A mátrix oszlopai közül egy maximális független vektorhalmazt, és írjuk fel a többi vektort ezek lineáris kombinációjaként! Adjuk meg A sorterének és nullterének is egy-egy bázisát!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mapsto$$
$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A vezérelemek az 1., 2. és 4. oszlopban vannak, így az A bázisoszlopai $(1,2,0,1)$, $(0,-1,1,-1)$ és $(0,1,1,1)$, és ezek bázisát alkotják az oszloptérnek. A redukált lépcsős alak megfelelő oszlopaiból leolvasható a többi oszlop előállítása is:

$$\begin{aligned} (1,0,2,-1) &= 1 \cdot (1,2,0,1) + 2 \cdot (0,-1,1,-1) \\ (2,3,3,\ \ 1) &= 2 \cdot (1,2,0,1) + 2 \cdot (0,-1,1,-1) + 1 \cdot (0,1,1,1) \end{aligned}.$$

A sortérnek egy bázisát adják a lépcsős alak nemnulla sorai:

$$\{(1,0,1,0,2), (0,1,2,0,2), (0,0,0,1,1)\}.$$

A nulltér bázisát az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén egyenletrendszer megoldásából olvashatjuk ki:

$$\begin{aligned} x_1 &= -s - 2t \\ x_2 &= -2s - 2t \\ x_3 &= s \\ x_4 &= -t \\ x_5 &= t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vagyis $\{(-1,-2,1,0,0), (-2,-2,0,-1,1)\}$ bázisa a nulltérnek.

2. *Az $\mathbb{R}^3$ alábbi részhalmazai közül melyik altér, illetve affin altér? Amelyik altér, annak adjuk meg egy bázisát, amelyik nem altér, de affin altér, azt adjuk meg $\mathbf{u} + V$ alakban, ahol V altér!*

a) $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{v}| = 1\}$ *b)* $\{(x,y,z) \mid x + 2y + z = 0\}$ *c)* $\{(x,y,z) \mid x + 2y + z = 1\}$

Megoldás: a) Nem altér (pl. mert a $\mathbf{0}$ nincs benne), de nem is affin altér. Ugyanis, ha az $U = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{v}| = 1 \}$ halmaz affin altér, akkor az $\mathbf{u} = (1,0,0) \in U$ elemre $V = U - \mathbf{u}$ altér volna. De $(0,0,1) - (1,0,0) = (-1,0,1) \in V$-re $2(-1,0,1) = (-2,0,2) \notin V$, ugyanis $(-2,0,2) + \mathbf{u} = (-1,0,2) \notin U$, mert $|(-1,0,2)| = \sqrt{5}$.

b) Altér, mert egy homogén lineáris egyenlet megoldástere. A megoldásokat vektorosan felírva: $(x,y,z) = s(-2,1,0) + t(-1,0,1)$ megkapjuk az altér bázisát: $\{(-2,1,0), (-1,0,1)\}$.

c) Nem altér, mert nem tartalmazza a $\mathbf{0}$-t, viszont affin altér mert egy lineáris egyenlet megoldáshalmaza. Ha V a b) részben definiált altér (a megfelelő homogén egyenlet megoldástere), akkor ez annak egy az inhomogén egyenlet megoldásával való eltoltja: $(1,0,0) + V$.

3. *Bizonyítsuk be, hogy két altér metszete mindig altér, de két altér uniója csak akkor altér, ha az egyik altér tartalmazza a másikat!*

Megoldás: Legyen $W_1, W_2 \leq V$. Ekkor $\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$, és ha $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W_i$ $(i = 1,2) \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v},\ \lambda\mathbf{u} \in W_i$ $(i = 1,2,\ \lambda \in K) \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v},\ \lambda\mathbf{u} \in W_1 \cap W_2$ $(\lambda \in K)$. Így $W_1 \cap W_2 \leq V$.

Viszont ha $W_1 \nsubseteq W_2$ és $W_2 \nsubseteq W_1$, akkor legyen $\mathbf{w}_1 \in W_1 \setminus W_2$ és $\mathbf{w}_2 \in W_2 \setminus W_1$. Így $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W_1 \cup W_2$, de $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \notin W_1$, mert ha $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1' \in W_1$ lenne, akkor $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1' - \mathbf{w}_1 \in W_1$ ellentmondás, és ugyanígy $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \notin W_2$, tehát $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \notin W_1 \cup W_2$. Ez azt mutatja, hogy $W_1 \cup W_2$ nem altér, ha W_1 és W_2 egyike sem tartalmazza a másikat. Ha viszont az egyik tartalmazza a másikat, akkor az unió a kettő közül a nagyobbik altér, tehát altere V-nek.

4. *Mi lehet a redukált lépcsős alakja az* $A = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \mathbf{a}_3] \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ *mátrixnak, ha* $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$, *de* $\mathbf{a}_1 \notin \operatorname{span}(\mathbf{a}_3)$*?*

Megoldás: $\mathbf{a}_i$ akkor bázisoszlop, ha nincs benne a tőle balra levő oszlopok által kifeszített altérben. $\mathbf{a}_1$ nem lehet nulla az $\mathbf{a}_1 \notin \operatorname{span}(\mathbf{a}_3)$ feltétel miatt, ezért szükségképpen bázisoszlop.

Ha $\mathbf{a}_2 \in \operatorname{span}(\mathbf{a}_1)$, akkor $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$ miatt $\mathbf{a}_3 \in \operatorname{span}(\mathbf{a}_1)$, azaz $\mathbf{a}_3$ skalárszorosa $\mathbf{a}_1$-nek. Viszont $\mathbf{a}_1 \notin \operatorname{span}(\mathbf{a}_3)$ miatt ez a skalár csak 0 lehet, vagyis $\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$, és így $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ egyike sem bázisoszlop. A bázisoszlopokból való előállítás együtthatói megadják a nem bázisoszlopok elemeit a redukált lépcsős alakban, így a $\mathbf{0} = \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$ feltételből adódó $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_3 = 0$ összefüggések az alábbi L_1 redukált lépcsős alakot adják.

Ha viszont $\mathbf{a}_2 \notin \operatorname{span}(\mathbf{a}_1)$, akkor $\mathbf{a}_2$ is bázisoszlop, és az $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$ összefüggésbeli együtthatók megadják az L_2 redukált lépcsős alak hamadik oszlopának elemeit is.

Így a mátrix redukált lépcsős alakja

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{vagy} \qquad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. *Legyen* $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (0,2,-1), (1,1,0)\}$.

a) *Lássuk be, hogy* $\mathcal{B}$ *bázis* $\mathbb{R}^3$*-ben!*

b) *Adjuk meg a* $\mathbf{v} = (1,0,0)$ *vektor koordinátavektorát a* $\mathcal{B}$ *bázisra nézve!*

c) Melyik az a $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ *vektor, amelynek koordinátavektora a* $\mathcal{B}$ *bázisra nézve*
$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$?

Megoldás: b) Ha B a $\mathcal{B}$ elemeiből mint oszlopvektorokból alkotott mátrix, akkor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ meghatározásához a $B\mathbf{x} = \mathbf{v}$ egyenletrendszert kell megoldanunk.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) A b) részben kiszámoltuk a B mátrix (redukált) lépcsős alakját is, amelyből látható, hogy $\mathcal{B}$ elemei függetlenek, és a 3-dimenziós $\mathbb{R}^3$ térben egy háromelemű független vektorhalmaz szükségképpen bázis.

c) $\mathbf{w} = 5\mathbf{b}_1 + 1\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3 = (5, 0, 5) + (0, 2, -1) - (2, 2, 0) = (3, 0, 4)$.

6. *Tekintsük a következő mátrixokat:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = [1 \quad 2 \quad 4] \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki a BC, CB, $5A$, $A + D$, AD, DA, $D^T D + A$ *mátrixkifejezések közül azokat, amelyek értelmezve vannak!*

Megoldás: $A + D$ és AD nincs értelmezve. A többi:

$$BC = [7],\ CB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix},\ 5A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -5 & 10 \end{bmatrix},\ DA = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ D^T + A = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

7. *Keressünk olyan* 2×2*-es és* 3×3*-as* C *valós mátrixokat, melyekre:* $C^2 = O$, *de* $C \neq 0$.

Megoldás: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, illetve $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ilyenek.

8. *Mennyi a rangja annak a valós* $n \times n$*-es mátrixnak, amelynek az elemei sorfolytonosan leolvasva* $1, 2, \ldots, n^2$?

Megoldás: A mátrixot lépcsős alakra hozhatjuk a következő módon: vonjuk ki az első sort az összes többiből. Ekkor a 2. sortól kezdve a kapott mátrix sorai az $(1, 1, \ldots, 1)$ vektor n-szerese, $2n$-szerese, …, $(n-1)n$-szerese, és az utóbbiakból megfelelő sorosztásokkal csupa $(1, 1, \ldots, 1)$-et kapunk. Az első és a második sor cseréje után az elsővel nullázva a kapott mátrix lépcsős lesz két nemnulla sorral. Tehát a megadott mátrix rangja 2.