Gyakorló feladatok

1. *Mi történik egy $n \times n$-es mátrixszal, ha balról, illetve jobbról az alábbi mátrixokkal megszorozzuk?*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A-val balról: az első sor szorzódik 3-mal,
A-val jobbról: az első oszlop szorzódik 3-mal,
B-vel balról: a második sor kétszerese hozzáadódik az első sorhoz,
B-vel jobbról: az első oszlop kétszerese hozzáadódik a második oszlophoz,
C-vel balról: az első és a második sor helyet cserél,
C-vel jobbról: az első és a második oszlop helyet cserél.

2. *Igazak-e minden $n \times n$-es A, B mátrixra az alábbi egyenlőségek?*

a) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ *b)* $(A+I)(A-I) = A^2 - I^2$
c) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ *d)* $(AB)^T = A^T B^T$

Megoldás: a), c): Nem igazak, csak amikor $AB = BA$.
b): Igaz. d) $(AB)^T = B^T A^T$, tehát általában a d) állítás sem igaz, csak amikor $AB = BA$.

3. *Írjuk fel az alábbi A mátrix bázisfelbontását, majd ezt felhasználva bontsuk fel a mátrixot $r(A)$ darab 1 rangú mátrix összegére!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Hozzuk az A mátrixot redukált lépcsős alakra!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ennek alapján az $A = BR$ bázisfelbontásban B oszlopai az A bázisoszlopai, R sorai pedig a redukált lépcsős alak sorai. Ezután a diádokra bontás tagjait a B oszlopainak az R ugyanannyiadik soraival való szorzatai adják.

$$A = BR = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. *Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét, ha van!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás:

$$[A\,|\,I\,] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & -3 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$
$[I\,|\,A^{-1}]$,

tehát $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.
B nem invertálható, mert nem teljes rangú (az első és a második sor összefügg).

$$[C\,|\,0\,] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & | & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = [I\,|\,C^{-1}] \quad \Rightarrow$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[D\,|\,I\,] \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = [I\,|\,D^{-1}] \;\Rightarrow$$

$$D^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. *Oldjuk meg az alábbi mátrixegyenleteket, ha lehet! A, B, C, D az előző feladatban szereplő mátrixok.*
a) $CX = D$ *b)* $BX = C$ *c)* $XB = M$, *ahol* $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *d)* $XB = AM$

Megoldás: a) Kihasználhatjuk, hogy az előző feladatban kiszámoltuk C inverzét, és abból

$$X = C^{-1}D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

De anélkül is megoldhatjuk szimultán egyenletrendszerként:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right],$$

tehát $X = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

b) Mivel B nem invertálható, itt a szimultán egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right]$$

és már itt a második sorból látszik, hogy nincs megoldás.

c) Az eredeti helyett a transzponáltját tudjuk szimultán egyenletrendszerként megoldani: $B^T X^T = M^T$:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Így X^T első oszlopa $\begin{bmatrix} 4-2t \\ t \\ -1 \end{bmatrix}$, a második $\begin{bmatrix} -1-2s \\ s \\ 2 \end{bmatrix}$, ahol t, s tetszőlegesek. Tehát

$$X = \begin{bmatrix} 4-2t & t & -1 \\ -1-2s & s & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) Mivel A invertálható, $XB = AM$ akkor és csak akkor, ha $A^{-1}XB = M$, tehát a c)-beli mátrixegyenlet megoldásait A-val balról megszorozva megkapjuk ennek az egyenletnek a megoldásait:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. *Lineárisak-e a következő leképezések? Ha igen, mi a standard mátrixuk?*

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + 1,\ y + 2,\ z + 3)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = (x + y,\ -y,\ -x + 2y)$

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}|$

d) az $\mathbb{R}^3$ $90°$*-os forgatása a* z *tengely körül*

e) az $x + y - 2z = 0$ *síkra való tükrözés*

f) $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, ahol* f *az* $y = x$ *egyenesre,* g *pedig az* x *tengelyre való tükrözés*

Megoldás: a) Nem lineáris, például mert $f(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$

b) Lineáris:

$$\begin{aligned} f((x,y)+(x',y')) =& f(x+x',\ y+y') = \\ =&(x+x'+y+y',\ -y-y',\ -x-x'+2y+2y') = \\ =&(x+y,\ -y,\ -x+2y)+(x'+y',\ -y',\ -x'+2y') = \\ =&f(x,y)+f(x',y'),\ \text{és} \\ f(\lambda(x,y)) =&f(\lambda x,\lambda y) = (\lambda x+\lambda y,\ -\lambda y,\ -\lambda x+2\lambda y) = \\ =&\lambda((x+y,\ -y,\ -x+2y) = \lambda f(x,y). \end{aligned}$$

Az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ báziselemek képei lesznek a standard mátrix oszlopai: $f(1,0) = (1,0,-1)$ és $f(0,1) = (1,-1,2) \Rightarrow$

$$\text{Az } f \text{ standard mátrixa} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vagy közvetlenül a függvény megadásából is leolvashatjuk a standard mátrixot:

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ -y \\ -x+2y \end{bmatrix} \quad \text{teljesül az} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{mátrixra.}$$

És ez egyúttal a linearitást is bizonyítja (a korábbi számolás helyett), mivel egy $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mátrixleképezés szükségképpen lineáris.

c) Nem lineáris, mert például $f(\mathbf{e}_1) = 1$, de $f(-\mathbf{e}_1) = 1 \neq -f(\mathbf{e}_1)$.

d) Az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bázisvektorok képe rendre $\mathbf{e}_2$, $-\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_3$, ezért a standard mátrix

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Itt a standard bázisvektorok képének kiszámolása helyett, vagy egy általános (x,y,z) pont képének meghatározása helyett, egyszerűbb egy olyan bázis elemeinek a képét megadni, amelyre a báziselemek vagy a síkból valók (mert azok önmagukba mennek), vagy merőlegesek rá. Legyen $\mathbf{b}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{b}_2 = (2,0,1)$, $\mathbf{b}_3 = (1,1,2)$. Ekkor az A standard mátrixra

$$A\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

f) Könnyen látható, hogy $\mathbf{e}_1 \overset{f}{\mapsto} \mathbf{e}_2 \overset{g}{\mapsto} -\mathbf{e}_2$, és $\mathbf{e}_2 \overset{f}{\mapsto} \mathbf{e}_1 \overset{g}{\mapsto} \mathbf{e}_1$, így a transzformáció standard mátrixa $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
De megkaphatjuk ezt a két transzformáció standard mátrixának kompozíciójaként is: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
Vagy felhasználhatjuk azt a geometriai tényt, hogy a sík két egymást metsző tengelyű tükrözésének kompozíciója a metszéspontjuk körüli kétszeres szögű forgatás, és felírhatjuk a $g \circ f$ mátrixát a $-90°$ szögű forgatás mátrixaként is.

7. *a) Adjunk meg olyan $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformációt, a standard mátrixával, amelyre $0 \neq \operatorname{Im} f \leq \operatorname{Ker} f$.*
b) Adjunk meg olyan $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixot, amelyre $A^3 = 0$, de $A^2 \neq 0$. Érdemes itt is először ilyen tulajdonságú lineáris transzformációt keresni.

Megoldás: a) A dimenziótétel szerint $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, s mivel $\operatorname{Im} f \neq 0$ és $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim \operatorname{Ker} f$, ez csak $\dim \operatorname{Im} f = 1$ és $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ esetén valósulhat meg.
Eldönthetjük előre, hogy legyen $\operatorname{Im} f = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1)$ és $\operatorname{Ker} f = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Ehhez elég, hogy $\mathbf{e}_1 \in \operatorname{Im} f$ és $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \operatorname{Ker} f$, ugyanis akkor a dimenziójuk legalább 1, illetve 2, és a dimenziótétel szerint ekkor ennél több nem is lehet, tehát pontosan $\operatorname{span}(\mathbf{e}_1)$-et és $\operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$-t kapjuk meg.
Az, hogy $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ a magban van, azt jelenti, hogy $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0}$ és $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{0}$. Emellett $\mathbf{e}_3$ képét még szabadon előírhatjuk. Legyen $\mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_1$, amivel biztosítjuk, hogy $\mathbf{e}_1$ a képben legyen. Tehát a feltételeknek megfelel az a transzformáció, amelynek standard mátrixa

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transzformációra teljesül, hogy $f \circ f$ nem nulla, de $f \circ f \circ f$ igen, ha f minden báziselemet a következőbe visz, a harmadikat pedig 0-ba: $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{0}$. Ennek a standard mátrixa kielégíti a feladat feltételeit:

$$\text{Az} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mátrixra} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad A^3 = 0$$