Gyakorló feladatok

1. *Van-e olyan $n > 0$, amelyre $A^n = I$, ha*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}?$$

Megoldás: Az $f_A : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ mátrixleképezés az $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5$ báziselemeket két ciklusban permutálja: $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_4 \mapsto \mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_5 \mapsto \mathbf{e}_2$, és az első ciklus elemeit az A hárommal osztható hatványai viszik önmagukba, a második ciklusét az A kettővel osztható hatványai. Így az A hatodik hatványa minden báziselemet helyben hagy, ezért $A^6 = I$.

2. *Tekintsük a $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(2,1,3),(1,2,4)\}$ bázist $\mathbb{R}^3$-ben. Mi a $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ és a $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ áttérési mátrix? Adjuk meg a $\mathbf{v} = (1,1,2)$ vektor koordinátavektorát a $\mathcal{B}$ bázisra nézve!*

Megoldás:

$$T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

és $T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \mapsto$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. *Mi lesz az $\{(x,y) \mid 3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4\} \subseteq \mathbb{R}^2$ alakzat egyenlete, ha a standard koordinátarendszer helyett a $\mathcal{B} = \{(1,1),(-1,1)\}$ bázishoz tartozó koordinátarendszerben írjuk fel?*

Megoldás: Ha a standard koordinátarendszerbeli $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ pont koordinátavektora az új koordinátarendszerben $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, akkor $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, azaz $x = x' - y'$ és $y = x' + y'$. Ezt behelyettesítve az egyenletbe megkapjuk, hogy mi az az egyenlet, amit az (x', y') koordinátáknak ki kell elégíteniük: $3(x'-y')^2 - 2(x'-y')(x'+y') + 3(x'+y')^2 = 4$, azaz $4(x')^2 + 8(y')^2 = 4$, vagy normál alakra hozva, $(x')^2 + (\sqrt{2}y')^2 = 1$. Ebből leolvasható, hogy a megadott alakzat egy ellipszis, a nagytengelye $(1,1)$ irányú, és az új koordinátarendszerben $2 \cdot 1$, az eredetiben $2|(1,1)| = 2\sqrt{2}$ hosszú, a kisebbik $(-1,1)$ irányú, az új koordinátarendszerben $2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ hosszú, az eredetiben $\sqrt{2}|(-1,1)| = 2$ hosszú.

4. *Ha az $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

akkor mi a mátrixa a $\mathcal{C} = \{\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1\}$, illetve a $\mathcal{D} = \{\mathbf{b}_1, 2\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban?

Megoldás:

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{b}_3 \mapsto 3\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 + 9\mathbf{b}_3 = 3\mathbf{c}_3 + 6\mathbf{c}_2 + 9\mathbf{c}_1 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{c}_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{b}_2 \mapsto 2\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{b}_2 + 8\mathbf{b}_3 = 2\mathbf{c}_3 + 5\mathbf{c}_2 + 8\mathbf{c}_1 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{c}_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_3 = \mathbf{b}_1 \mapsto 1\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 + 7\mathbf{b}_3 = 1\mathbf{c}_3 + 4\mathbf{c}_2 + 7\mathbf{c}_1 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{c}_3)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [f]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{b}_1 \mapsto 1\mathbf{b}_1 + 4\mathbf{b}_2 + 7\mathbf{b}_3 = 1\mathbf{d}_1 + 2\mathbf{d}_2 + 7\mathbf{d}_3 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{d}_1)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_2 = 2\mathbf{b}_1 \mapsto 4\mathbf{b}_1 + 10\mathbf{b}_2 + 16\mathbf{b}_3 = 4\mathbf{d}_1 + 5\mathbf{d}_2 + 16\mathbf{d}_3 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{d}_2)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_3 = \mathbf{b}_3 \mapsto 3\mathbf{b}_1 + 6\mathbf{b}_2 + 9\mathbf{b}_3 = 3\mathbf{d}_1 + 3\mathbf{d}_2 + 9\mathbf{d}_3 \quad \Rightarrow [f(\mathbf{d}_3)]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad [f]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 7 & 16 & 9 \end{bmatrix}$$

5. *Írjuk fel az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban!*

a) Az $y = x$ egyenesre való tükrözés az $\mathbb{R}^2$ standard $\mathcal{E}$, továbbá a $\mathcal{B} = \{(1,1), (-1,1)\}$, illetve $\mathcal{C} = \{(1,1), (-2,0)\}$ bázisában;

b) az $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, ahol $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, a $\mathcal{B} = \{(1,2), (1,1)\}$ bázisban;

c) az $S: \ x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés egy tetszőleges olyan bázisban, amelynek elemei mind párhuzamosak az S síkkal vagy merőlegesek rá, illetve a standard bázisban.

Megoldás: a) Mivel $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1$, a standard mátrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$P = T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = T_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[f]_{\mathcal{B}} = Q^{-1}AQ = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$P = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[f_A]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

c) Legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, ahol $\mathbf{b}_1 = (1,1,1)$ és $\mathbf{b}_2 = (1,0,-1)$ az S két vektora és $\mathbf{b}_3 = (1,-2,1)$ a sík normálvektora. Ekkor $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ önmagába, $\mathbf{b}_3$ $\mathbf{0}$-ba képződik, így

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki az áttérés mátrixát!

$$P = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[f]_{\mathcal{E}} = P[f]_{\mathcal{B}}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

6. *Írjuk fel alkalmas bázisban, majd a standard bázisban is a* $\mathbf{v} = (1,1,1)$ *irányvektorú, origón átmenő egyenes körüli* $90°$*-os forgatás mátrixát!*

Megoldás: Érdemes az egyenessel párhuzamos, és az egyenesre és egymásra merőleges vektorokat választani. Legyen $\mathbf{b}_1 = (1,1,1)$, erre merőleges $\mathbf{b}_2 = (1,-1,0)$, és mindkettőre merőleges ezek vektoriális szorzata, $\mathbf{b}_3 = (1,1,-2)$. A forgatás $\mathbf{b}_1$-et önmagába, $\mathbf{b}_2$-t a $\mathbf{b}_3$ irányú $\sqrt{2}$ hosszú $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{b}_3$ vektorba, $\mathbf{b}_3$-at a $-\mathbf{b}_2$ irányú, $\sqrt{6}$ hosszú $-\sqrt{3}\mathbf{b}_2$ vektorba. Így a forgatás $\mathcal{B}$ bázisban felírt mátrixa

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A standard mátrixot megkapjuk $P[f]_{\mathcal{B}}P^{-1}$ alakban, ahol $P = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ az áttérés mátrixa.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$[f]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3}-6 & 2\sqrt{3}+6 \\ 2\sqrt{3}+6 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3}-6 \\ 2\sqrt{3}-6 & 2\sqrt{3}+6 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

7. *Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát elemi sorműveletek segítségével!*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 13 \end{vmatrix} = -1 \cdot 13 = -13$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 8 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 8 & -24 \\ 0 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 8\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

A negyedik mátrixnál $[n/2]$ sorcserét kell végezni (az első sort az utolsóval, a másodikat az utolsó előttivel, és így tovább), hogy az identitás mátrixot kapjuk, így a determinánsa $(-1)^{[n/2]}$.

8. *Sorműveletek nélkül, csak inverziószámolással határozzuk meg az alábbi kígyók determinánsát!*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az A mátrixhoz a $4, 3, 2, 1$ permutáció tarozik, amelynek az inverziószáma $\binom{4}{2} = 6$, így $|A| = (-1)^6 \cdot 1^4 = 1$.
A B-hez az $1, 3, 4, 2$ permutáció tartozik, inverziószáma 2, így $|B| = (-1)^2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 4 = -24$.
A C-hez tartozó permutáció $2, 1, 3$, inverziószáma 1, és $|C| = (-1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = -30$.

9. *Legyen A egy 5×5-ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a $2A^{-1}$, $(2A)^{-1}$, és $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$ mátrixoknak?*

Megoldás: $|2A^{-1}| = 2^5|A^{-1}| = 32 \cdot \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{32}{3}$

$|(2A)^{-1}| = \dfrac{1}{|2A|} = \dfrac{1}{96}$

$|A^2 A^T A^{-1}| = |A|^2|A|\dfrac{1}{|A|} = 9.$