Gyakorló feladatok

1. *Számítsuk ki a következő $n \times n$-es determináns értékét! (Ötlet: a második sort vonjuk ki az összes többiből.)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (n-2)!$$

2. *Számítsuk ki a*

$$\begin{bmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{bmatrix}$$

determináns értékét! Hogyan lehet ezt általánosítani $n \times n$-es mátrixra? Mennyi a mátrix rangja az a, b, n értékektől függően?

Megoldás: Tekintsük rögtön az $n\times n$-es mátrixot, amelynek főátlójában végig b, mindenhol máshol a van. A determináns kiszámolásánál adjuk az összes sort az elsőhöz, ebből emeljünk ki $(b+(n-1)a)$-t, majd ennek az a-szorosát vonjuk ki a többi sorból! Így háromszögmátrixot kapunk.

$$\begin{vmatrix} b & a & a & \dots & a \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+(n-1)a & \dots & \dots & \dots & b+(n-1)a \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & b \end{vmatrix} =$$

$$(b+(n-1)a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & b & a & \dots & a \\ a & a & b & \dots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & b \end{vmatrix} = (b+(n-1)a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & b-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b-a \end{vmatrix} =$$

$$= (b+(n-1)a)(b-a)^{n-1}.$$

Ha $b \neq a$ és $b \neq (n-1)a$, akkor a mátrix determinánsa nem 0, így a rangja n. Ha $b = a$, akkor látható, hogy a mátrix rangja 0 vagy 1 aszerint, hogy a nulla vagy nem nulla. Az $n = 1$ esetben 0 vagy 1 a rang, aszerint, hogy b nulla vagy nem nulla. Marad az az eset, amikor $b = -(n-1)a \neq 0$, és $n \geq 2$. Ekkor a rang kisebb n-nél, viszont a jobb fölső sarokaldeterminánsban először az első (csupa a) sort az összes többiből kivonva, majd a determinánst az utolsó oszlop szerint kifejtve azt kapjuk, hogy ennek az aldeterminánsnak az értéke $(-1)^n a|\mathrm{diag}(b-a,\dots,b-a)| = (-1)^n a(b-a)^{n-2} \neq 0$, tehát az eredeti mátrix rangja $n-1$.

5. *Határozzuk meg az A mátrix LU-felbontását! Számítsuk ki ebből az A determinánsát és az $A\mathbf{x} = [1 \ -1 \ 0]^T$ egyenletrendszer megoldását!*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás: A felső háromszög alakra hozásnál csak $s_i \mapsto s_i - cs_j$ alakú műveleteket használjunk, ahol $i > j$, és először az első sor többszöröseit vonjuk ki, majd a második sorét, és így tovább. Ha a végrehajott sorműveletekhez tartozó elemi mátrixok rendre $E_1, \ldots, E_k$, akkor $E_k \cdots E_1 A = U$ felső háromszögmátrix, és ebből $A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1} U$, ahol $L := E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$ alsó háromszögmátrix, csupa 1-gyel a főátlóban. L-et megkaphatjuk úgy, hogy az I egységmátrixra végrehajtjuk az A-n végzett sorműveletek inverzét fordított sorrendben: $L = E_1^{-1}(E_2^{-1} \cdots (E_k^{-1} I) \cdots)$. Így $l_{ij} = c_{ij}$ pontosan akkor, ha szerepelt $s_i \mapsto s_i - c_{ij} s_j$ alakú sorművelet, az átló alatti többi elem és minden átló fölötti 0, az átlóbeliek pedig 1-ek.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = U \quad \text{és} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

Az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, azaz $L(U\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásához először az $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, majd az $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ egyenletrendszert oldjuk meg.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(felülről lefelé behelyettesítésekkel megoldva), és

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

(alulról felfelé behelyettesítésekkel megoldva).

6. *Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát és inverzét aldeterminánsok segítségével:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az utolsó sor szerint kifejtve: $|A| = (-1) \cdot (0 \cdot 1 - 2 \cdot 3) - 1 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = 6 - 1 = 5$.

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -6 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

7. *Cramer szabály alkalmazásával oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ha A az előző feladatbeli mátrix és $\mathbf{b} = [0\ 1\ 1]^T$.*

Megoldás:

$$x_1 = \frac{|A_{1,\mathbf{b}}|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{4}{5}, \qquad x_2 = \frac{|A_{2,\mathbf{b}}|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{1}{5},$$

$$x_3 = \frac{|A_{3,\mathbf{b}}|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{2}{5}$$

8. *Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát minél egyszerűbben!*

$$a)\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&2&4\\2&3&1\end{bmatrix}\quad b)\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&2&3&0\\0&2&3&0\\1&0&0&4\end{bmatrix}\quad c)\begin{bmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c+d&c^2+d^2\end{bmatrix}\quad d)\begin{bmatrix}2&1&0&\dots&0\\1&2&1&\dots&0\\0&1&2&\ddots&0\\0&\dots&\ddots&\ddots&1\\0&\dots&&1&2\end{bmatrix}_{n\times n}$$

Megoldás: a) Az első sort a másodikból kivonjuk, és a második szerint kifejtjük a determinánst.

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&2&4\\2&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&0&5\\2&3&1\end{vmatrix}=-5\cdot\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=5$$

b) A harmadik sort kivonjuk a másodikból, és a második sor szerint, majd a kapott 3×3-as determinánst a harmadik sor szerint kifejtjük.

$$\begin{vmatrix}1&1&0&1\\1&2&3&0\\0&2&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0&1\\1&0&0&0\\0&2&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0&1\\2&3&0\\0&0&4\end{vmatrix}=-4\cdot 3=-12$$

c) A determináns multilinearitását használjuk a harmadik sorra, hogy a feladatot visszavezessük Vandermonde-determinánsok kiértékelésére.

$$\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c+d&c^2+d^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&d&d^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\-1&0&0\end{vmatrix}=$$

$$=(b-a)(c-a)(c-b)+(b-a)(d-a)(d-b)-ab(b-a).$$

d) Nevezzük el az $n\times n$-es mátrixot A_n-nek, a determinánsát d_n-nek. Az első sor szerint kifejtve azt kapjuk, hogy $d_n=|A_n|=2|A_{n-1}|-1\cdot\det\begin{bmatrix}1&\mathbf{e}_1^T\\\mathbf{0}&A_{n-2}\end{bmatrix}$, és a második determinánst az első oszlopa szerint kifejtve ez tovább $2d_{n-1}-|A_{n-1}|=2d_{n-1}-d_{n-2}$. A $d_n=2d_{n-1}-d_{n-2}$ egyenletet átrendezve a $d_n-d_{n-1}=d_{n-1}-d_{n-2}$ összefüggéshez jutunk, így az $s_n:=d_n-d_{n-1}$ sorozatra $s_n=s_{n-1}=\ldots=s_2=d_2-d_1=3-2=1$, tehát $d_n=1+d_{n-1}=2+d_{n-2}=\ldots=(n-1)+d_1=n+1$.

9. *Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját! Keressünk benne a rangnak megfelelő méretű nemnulla aldeterminánst!*

$$\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\1&2&-1&1\\2&3&1&1\end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\1&2&-1&1\\2&3&1&1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\0&0&0&1\\0&-1&3&1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1&2&-1&0\\0&-1&3&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

lépcsős, így a mátrix rangja 3. Az A utolsó három oszlopából alkotott mátrix determinánsa nem nulla: az utolsó oszlop szerint kifejtve, $-1\cdot 5+1\cdot 0=-5$.