Gyakorló feladatok

1. *Legyenek* $B = \begin{bmatrix} I & A \\ I & 2A \end{bmatrix}$ *és* $\mathbb{C} = \begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix}$ 4×4*-es blokkmátrixok, ahol* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$*. Számítsuk ki a* BC *szorzatot és ennek segítségével a* B *determinánsát!*

Megoldás: $BC = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & A \end{bmatrix}$ blokkháromszög-mátrix, a determinánsa $|BC| = |I| \cdot |A| = -1$, míg a C blokkháromszögmátrix determinánsa $|C| = |I| \cdot |I| = 1$, tehát a determinánsok szorzástétele szerint $-1 = |BC| = |B| \cdot |C| = |B|$.

2. *Tegyük fel, hogy* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ *páronként merőleges nemnulla vektorok* $\mathbb{R}^n$*-ben.*

a) Mi a $\mathbf{v}_i$ *vektorok skaláris szorzata az* $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{v}_j$*-vel, ahol* $\lambda_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$*?*

b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ *lineárisan függetlenek!*

Megoldás: a) $\mathbf{u}\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{v}_j \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i = \lambda_i |\mathbf{v}_i|^2$, mert a merőlegesség miatt $\mathbf{v}_j \mathbf{v}_i = 0$, ha $i \neq j$

b) Ha $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$, akkor az a) rész szerint $0 = \mathbf{0}\mathbf{v}_i = \lambda_i |\mathbf{v}_i|^2$ minden i-re, s mivel $\mathbf{v}_i \neq 0 \Rightarrow |\mathbf{v}_i| \neq 0$, ebből $\lambda_i = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ következik.

3. *Adjuk meg az*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 6 \end{array}$$

valós egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen megoldását, és ennek felhasználásával írjuk fel az összes megoldást!

Megoldás:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ebből leolvasható a homogén egyenletrendszer megoldása is, azaz az együtthatómátrix nulltere:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{rcr} x & = & -2t \\ y & = & -t \\ z & = & t \end{array} \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a nulltér bázisa $\{(-2, -1, 1)\}$, és a sortér ennek a merőlegese, ezért az eredeti egyenletrendszert (illetve annak a redukáltját) ki kell egészíteni a $(-2, -1, 1)(x, y, z)^T = 0$ egyenlettel.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

A sortérbe eső megoldás: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, és az összes megoldás: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. *Legyen $W \le \mathbb{R}^3$ altér, melynek generátorrendszere $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$.*
a) Adjuk meg $W^\perp$ egy bázisát.
b) Határozzuk meg W altérre való merőleges vetítés mátrixát báziscserével és anélkül, azaz használva az $A(A^TA)^{-1}A^T$ képletet.
c) Bontsuk fel a $\mathbf{v}=(1,1,1)$ vektort W-beli és $W^\perp$-beli összetevők összegére!

Megoldás: a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \text{ megoldása } \begin{array}{rl} x = & -t \\ y = & t \\ z = & t \end{array}, \text{ azaz } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tehát $W^\perp$ bázisa $\{(-1,1,1)\}$.

b) Báziscserével: A $\mathcal{B}=\{(1,0,1),(1,1,0),(-1,1,1)\}$ bázisban a vetítés mátrixa a $D=\operatorname{diag}(1,1,0)$ mátrix, mert a bázis első két vektorát (a W-beli vektorokat) önmagukba képezi, így ezek koordinátavektora $(1,0,0)^T$ és $(0,1,0)^T$, az utolsót, amely W-re merőleges, pedig $\mathbf{0}$-ba. Így a vetítés standard mátrixa $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}DT_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}DT_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vagy pedig a $P_W := A(A^TA)^{-1}A^T$ képlettel, ahol A oszlopai a W báziselemei:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (A^TA)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$P_W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c) $\mathbf{v} = P_W\mathbf{v} + (\mathbf{v} - P_W\mathbf{v}) = \left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

5. *Legyen $\mathbb{R}^n = U \oplus W$, ahol U bázisa $\mathcal{B}$ és W bázisa $\mathcal{C}$, legyenek továbbá a B mátrix oszlopai a $\mathcal{B}$, a C mátrix oszlopai pedig a $\mathcal{C}$ elemei.*
a) Lássuk be, hogy a W mentén U-ra való vetítésnek, azaz az $f:\mathbf{u}+\mathbf{w}\mapsto\mathbf{u}$ ($\mathbf{u}\in U$, $\mathbf{w}\in W$) lineáris leképezésnek a mátrixa $P=[B|0][B|C]^{-1}$.
b) Alkalmazzuk ezt a képletet az $\mathbb{R}^3 = \operatorname{span}((1,0,1),(1,1,0)) \oplus \operatorname{span}((1,1,1))$ direkt felbontás első, illetve második komponensére való vetítés mátrixának meghatározására!
c) Oldjuk meg a b) feladatot báziscserével is!

Megoldás: a) Mivel $\mathbb{R}^n$ az U és W alterek direkt összege, $\mathcal{D} = \mathcal{B}\dot\cup\mathcal{C}$ bázisa $\mathbb{R}^n$-nek (ahol $\mathcal{D}$-ben először a $\mathcal{B}$, aztán $\mathcal{C}$ elemeit soroljuk föl a két bázisban megadott sorrendben). Így $[B|C]_{n\times n}$ oszlopai függetlenek, azaz $[B|C]$ invertálható. Továbbá $\mathbf{u}\in U$-ra $[\mathbf{u}]_\mathcal{D} = \begin{bmatrix} [\mathbf{u}]_\mathcal{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, ezért
$\mathbf{u} = [B|C][\mathbf{u}]_\mathcal{D} = [B|0][\mathbf{u}]_\mathcal{D}$, amiből $[B|0][B|C]^{-1}\mathbf{u} = [B|0][\mathbf{u}]_\mathcal{D} = \mathbf{u}$.
Ha viszont $\mathbf{w}\in W$, akkor $[\mathbf{w}]_\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ [\mathbf{w}]_\mathcal{C} \end{bmatrix}$, ezért $[B|0][\mathbf{w}]_\mathcal{D} = \mathbf{0}$, amiből
$[B|0][B|C]^{-1}\mathbf{w} = [B|0][\mathbf{w}]_\mathcal{D} = \mathbf{0}$. Tehát $\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$ ($\mathbf{u}\in U$, $\mathbf{w}\in W$) esetén
$[B|0][B|C]^{-1}\mathbf{v} = [B|0][B|C]^{-1}(\mathbf{u}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u} = f(\mathbf{v})$.

b)

$$[B|C]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$P_{U|W} = [B|0]B|C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és hasonlóan} \quad P_{W|U} = [0|C]B|C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c) A $\mathcal{D} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{(1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$ bázisban az egyenes mentén a síkra való vetítés mátrixa $D = \mathrm{diag}(1,1,0)$, így a standard bázisban $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{D}} D T_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{D}} D T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{D}}^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

és ebből a másik komponensre való vetítés $P_{W|U} = I - P_{U|W} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. *Határozzuk meg az $x - y = 1,\ x - y = 2$ ellentmondásos lineáris egyenletrendszer optimális közelítő megoldásait normálegyenlet segítségével! Határozzuk meg az egyetlen sortérbe eső (minimális abszolútértékű) optimális közelítő megoldást!*

Megoldás: $[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & | & 2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow$

$$[A^TA|A^T\mathbf{b}] = A^T[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & | & 3 \\ -2 & 2 & | & -3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3/2 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Az utóbbinak a megoldása $\begin{bmatrix} 3/2 + t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$. A minimális abszolút értékű közelítő megoldást az $(1,1)$ által generált nulltérre való merőlegesség feltételének hozzáadásával kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3/2 \\ 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3/2 \\ 0 & 2 & | & -3/2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3/4 \\ 0 & 1 & | & -3/4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}.$$

7. *(Lineáris regresszió) Legyen $y = a + bx$ ismeretlen egyenes. Három mérési eredmény szerint* $(1,1), (2,3), (4,6)$ *az egyenesen lévő* (x_i, y_i) *pontok mért koordinátái. Keressük a legjobban közelítő megoldást* (a,b)*-re normálegyenlet segítségével! (A sorai* $(1, x_i)$*-k, b sorai* y_i*-k)*

Megoldás: Az $a + b = 1$, $a + 2b = 3$, $a + 4b = 6$ egyenletrendszer legjobban közelítő megoldását keressük.

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & | & 3 \\ 1 & 4 & | & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow [A^TA|A^T\mathbf{b}] = A^T[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 3 & 7 & | & 10 \\ 7 & 21 & | & 31 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & | & 10 \\ 1 & 7 & | & 11 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 7 & | & 11 \\ 0 & -14 & | & -23 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1/2 \\ 0 & 1 & | & 23/14 \end{bmatrix}.$$

Tehát a legjobban közelítő egyenes (azaz amelynél az adott x_i értékeknél a hibák négyzetösszege minimális), $y = -\frac{1}{2} + \frac{23}{14}x$.

8. *Határozzuk meg a következő mátrixok pszeudoinverzét!*

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&1&3\end{bmatrix}$$

Megoldás: Ha egy B mátrix teljes oszloprangú, akkor $B^+ = (B^TB)^{-1}B^T$, ha C teljes sorrangú, akkor $C^+ = C^T(CC^T)^{-1}$. Ha az A mátrixra egyik feltétel sem teljesül, akkor az A bázisfelbontása olyan $A = BC$ szorzatot ad, amelyre B teljes oszloprangú és C teljes sorrangú, és ekkor $A^+ = C^+B^+$.

a) $C = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$ teljes sorrangú, így $C^+ = \begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}\right)^{-1} =$

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}\tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\\-1&2\end{bmatrix}.$$

b) $C = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ teljes oszloprangú, így $C^+ = \left(\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix} =$ $\tfrac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix} \Rightarrow A = BC = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix} \Rightarrow$

$$C^+ = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad B^+ = \left(\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A^+ = C^+B^+ = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}.$$

d) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\1&1&3\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&1&2\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow A = BC = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix} \Rightarrow$

$$C^+ = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&2\end{bmatrix}\tfrac{1}{6}\begin{bmatrix}5&-2\\-2&2\end{bmatrix} = \tfrac{1}{6}\begin{bmatrix}5&-2\\-2&2\\1&2\end{bmatrix},$$

$$B^+ = \left(\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix} = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$A^+ = C^+B^+ = \tfrac{1}{18}\begin{bmatrix}12&-9&3\\-6&6&0\\0&3&3\end{bmatrix} = \tfrac{1}{6}\begin{bmatrix}4&-3&1\\-2&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

9. *Mutassuk meg, hogy általában nem igaz, hogy $(AB)^+$ egyenlő lenne B^+A^+-szal. Tekintsük az $A = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$ mátrixokat!*

Megoldás: Legyen $C = AB$. A három mátrix bázisfelbontása

$$A = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix} \text{ és } C = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix},\text{ amiből}$$

$$A^+ = [\,1 \quad 0\,]^+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\,1 \quad 0\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B^+ = [\,0 \quad 1\,]^+ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tfrac{1}{2} [\,1 \quad 1\,] = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C^+ = [\,0 \quad 1\,]^+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\,1 \quad 0\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ de } B^+A^+ = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. *Oldjuk meg a 6. feladatot az együtthatómátrix pszeudoinverzével való beszorzással is!*

Megoldás: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [\,1 \quad -1\,] \Rightarrow$

$A^+ = [\,1 \quad -1\,]^+ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^+ = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tfrac{1}{2} [\,1 \quad 1\,] = \tfrac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ A legjobb közelítő megoldás:

$$A^+\mathbf{b} = \tfrac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}.$$