

NÉV _____

NEPTUNKÓD _____

Bevezetés az algebra 1

1. vizsga – elmélet

2019-12-19

Az írásbeli dolgozat első felében tesztkérdésekre kell válaszolni, melyekre összesen 20 pont kapható. A második részében definíciók és tételek precíz megfogalmazását kérjük. Az utolsó részben bizonyításokat, vagy azok egyes részeit kell tömören, de világosan leírni. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! (6 pont)

a) $[-x] = -[x]$ minden $x \in \mathbb{R}$ -re I

b) Ha $\{a_1, \dots, a_m\}$ teljes maradékrendszer modulo m , és $0 \neq b \in \mathbb{Z}$, akkor $\{a_1b, \dots, a_mb\}$ is teljes maradékrendszer modulo m . H

c) $K[x]$ -beli irreducibilis polinomnak nincs gyöke K -ban. H

d) \mathbb{Z}_2 fölött bármely két különböző nemnulla vektor lineárisan független I

e) Ha $A \in K^{n \times n}$ invertálható, akkor minden i -hez van j , hogy $A_{ij} \neq 0$ (ahol A_{ij} az (i, j) helyhez tartozó előjeles aldetermináns). I

f) Ha A teljes oszloprangú, akkor AA^T invertálható. H

2. Melyik jólrendezett az alábbi halmazok közül? (2 pont)

$A = [0, 1]$ intervallum $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$

$C = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$

C

3. Írjuk fel az $x^9 - 1$ polinomot körosztási polinomok szorzataként. Hányadfokúak a tényezők? (2 pont)

$x^9 - 1 = \Phi_1(x) \Phi_3(x) \Phi_9(x)$
 felh: 1 2 6

4. Írjuk fel a $z = (1 + 2i)^4$ összes negyedik gyökét algebrai alakban! (2 pont)

$1+2i, -2+i, -1-2i, 2-i$

5. Melyik test a következők közül?

a) \mathbb{Q} b) \mathbb{Z}_6 c) \mathbb{Z}_{13} d) $\mathbb{R}[x]$ (2 pont)

a), c)

6. Hány dimenziós az alábbi A mátrix nulltere, ha \mathbb{Q} fölötti, illetve \mathbb{Z}_2 fölötti mátrixnak tekintjük? (2 pont)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

\mathbb{Q} fölött 2
 \mathbb{Z}_2 fölött 3

7. Adjunk meg két valós nemnulla A és B mátrixot, amelyre $r(A + B) = r(A) + r(B)$ teljesül! (2 pont)

pl. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 $r(A) = r(B) = 1$, $r(A+B) = r(I) = 2$

8. A következők közül melyik mátrix mátrixa egy merőleges vetítésnek?

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, (2 pont)

B

9. Definiáljuk a kitüntetett közös osztót!

(2 pont)

10. Definiáljuk a pszeudo inverzet (a négy tulajdonsággal)!

(3 pont)

11. Mi a Vandermonde-determináns, és mennyi az értéke?

(2 pont)

12. Definiáljuk az elemi szimmetrikus polinomokat, és mondjuk ki a szimmetrikus polinomok alaptételét!
(3 pont)

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be Dirichlet approximációs tételét!

(5 pont)

14. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a Cramer-szabályt!

(5 pont)