

NÉV _____

NEPTUNKÓD _____

Bevezetés az algebra 1

1. vizsga – gyakorlat

2019-12-19

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Írjuk fel 2019-et 8-as és 16-os számrendszerben!

E2. Oldjuk meg az $5x \equiv 26 \pmod{23}$ kongruenciát!

E3. Adjunk meg olyan p prímet, amelyre az $x^3 + 2x + 5$ polinom irreducibilis $\mathbb{Z}_p[x]$ -ben!

E4. Legyen f minimális fokú valós polinom, amelynek kétszeres gyöke az $1 + i$, és háromszoros gyöke a 0. Mi az $f(i)$ értéke?

E5. Ha $A = [\mathbf{a} \mid \mathbf{b} \mid \mathbf{c}] \in \mathbb{R}^3$, és $|A| = 2$, akkor mi a determinánsa a $B = [2\mathbf{c} - \mathbf{a} \mid -\mathbf{c} \mid 3\mathbf{b}]$ mátrixnak?

E6. Mennyi a rangja az $\begin{bmatrix} I & J \\ -J & J \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ blokkmátrixnak, ha $I = I_n$ az $n \times n$ -es egységmátrix, J -nek pedig minden eleme 1?

E7. Adjuk meg az $\mathbf{a} = (1, 0, 1, 1)$ és $\mathbf{b} = (3, 1, -1, 1)$ \mathbb{R}^4 -beli vektorok hosszát és szögét!

E8. Ha az A mátrix pszeudoinverze $A^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, akkor mi az $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális közelítő megoldása?

1. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert!

$$x \equiv 2 \pmod{4}$$

$$x \equiv -1 \pmod{3}$$

$$x \equiv 3 \pmod{7}$$

2. Az $a \in \mathbb{R}$ milyen értékére konzisztens az alábbi egyenletrendszer? Ehhez az a -hoz határozzuk meg az egyenletrendszer sortérbe eső megoldását!

$$x - y = a$$

$$y - z = 2$$

$$2x - 3y + z = 2$$

3. Írjuk fel az $x - 2y + 2z = 0$ síkra való merőleges vetítés standard mátrixát, és számítsuk ki az $(1, 0, 2)$ vektor vetületét!

4. Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix pszeudoinverzét!

5. Határozzuk meg az alábbi A mátrix rangját, adjuk meg az oszlopterének és a nullterének egy-egy bázisát, és adjuk meg egy $r(A)$ méretű nemnulla aldeteminánsának az értékét!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Oldjuk meg a $\frac{z^3}{z^3 + i} = 1 + i$ egyenletet!

7. Bontsuk fel az $f(x) = x^5 + x^4 - 2x^2 + 2$ polinomot $\mathbb{Q}[x]$ -ben és $\mathbb{Z}_5[x]$ -ben irreducibilis tényezők szorzatára!

8. Írjuk fel az $f(a, b, c) = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ polinomot elemi szimmetrikus polinomok szorzataként! Mi az $f(a, b, c)$ értéke, ha a, b, c a $2x^3 - 2x^2 + 3$ polinom gyökei?