E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 1 **1. vizsga – gyakorlat** **2019-12-19**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Írjuk fel 2019-et 8-as és 16-os számrendszerben!

3743_8 $7E3_{16}$

E2. Oldjuk meg az $5x \equiv 26 \pmod{23}$ kongruenciát!

$x \equiv -4$ (23)

E3. Adjunk meg olyan p prímet, amelyre az $x^3 + 2x + 5$ polinom irreducibilis $\mathbb{Z}_p[x]$-ben!

pl. $p = 3$

E4. Legyen f minimális fokú valós polinom, amelynek kétszeres gyöke az $1 + i$, és háromszoros gyöke a 0. Mi az $f(i)$ értéke?

$f(x) = (x-1-i)^2(x-1+i)^2x^3$

$(-1)^2 \cdot (-1+2i)\, i^3 = 2 + i$

E5. Ha $A = [\,\mathbf{a}\,|\,\mathbf{b}\,|\,\mathbf{c}\,] \in \mathbb{R}^3$, és $|A| = 2$, akkor mi a determinánsa a $B = [\,2\mathbf{c} - \mathbf{a}\,|\,-\mathbf{c}\,|\,3\mathbf{b}\,]$ mátrixnak?

-6

E6. Mennyi a rangja az $\begin{bmatrix} I & J \\ -J & J \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ blokkmátrixnak, ha $I = I_n$ az $n\times n$-es egységmátrix, J-nek pedig minden eleme 1?

$n+1$

E7. Adjuk meg az $\mathbf{a} = (1, 0, 1, 1)$ és $\mathbf{b} = (3, 1, -1, 1)$ $\mathbb{R}^4$-beli vektorok hosszát és szögét!

$\frac{\underline{a}\,\underline{b}}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$|\underline{a}| = \sqrt{3}$, $|\underline{b}| = \sqrt{12}$, szög: $60°$

E8. Ha az A mátrix pszeudoinverze $A^+ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, akkor mi az $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű optimális közelítő megoldása?

$A^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

1. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert!

$$x \equiv 2 \pmod 4$$
$$x \equiv -1 \pmod 3$$
$$x \equiv 3 \pmod 7$$

$x \equiv 38 \quad (84)$

2. Az $a \in \mathbb{R}$ milyen értékére konzisztens az alábbi egyenletrendszer? Ehhez az a-hoz határozzuk meg az egyenletrendszer sortérbe eső megoldását!

$$\begin{aligned} x - y \quad &= a \\ y - z &= 2 \\ 2x - 3y + z &= 2 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4-2a \end{array}\right]$ konz $\Leftrightarrow a = 2$

Ált. mo.: $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, sortérben: $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

3. Írjuk fel az $x - 2y + 2z = 0$ síkra való merőleges vetítés standard mátrixát, és számítsuk ki az $(1, 0, 2)$ vektor vetületét!

$I - \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$(1,0,2) \longmapsto (4/9, 10/9, 8/9)$

4. Számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix pszeudoinverzét!

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (1 \;\; 1)$ bázisfelb.

$A^+ = (1\;\;1)^+ \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}^+ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}(1 \;\; -1) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

5. Határozzuk meg az alábbi A mátrix rangját, adjuk meg az oszlopterének és a nullterének egy-egy bázisát, és adjuk meg egy $r(A)$ méretű nemnulla aldeterminánsának az értékét!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$O(A)$ bázisa: $\{(1,2,1), (0,1,3), (1,0,1)\}$

$N(A)$ bázisa: $\{(1,-1,1,0)\}$

$r(A) = 3$ $\quad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$

6. Oldjuk meg a $\dfrac{z^3}{z^3 + i} = 1 + i$ egyenletet!

$z^3 = -1 - i = \sqrt{2}\,(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ)$

$z = \sqrt[6]{2}\,(\cos(75^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \sin(75^\circ + k \cdot 120^\circ))$

$k = 0, 1, 2$

7. Bontsuk fel az $f(x) = x^5 + x^4 - 2x^2 + 2$ plinomot $\mathbb{Q}[x]$-ben és $\mathbb{Z}_5[x]$-ben irreducibilis tényezők szorzatára!

$\mathbb{Q}[x]$-ben: $(x+1)(x^4 - 2x + 2)$

irred.: Sch-E. $p = 2$

$\mathbb{Z}_5[x]$-ben:

$(x+1)^2(x^3 - x^2 + x + 2)$ ← irred.: 3-adfokú, és $0, \pm 1, \pm 2$ nem gyök

8. Írjuk fel az $f(a, b, c) = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ polinomot elemi szimmetrikus polinomok szorzataként! Mi az $f(a, b, c)$ értéke, ha a, b, c a $2x^3 - 2x^2 + 3$ polinom gyökei?

$x^3 - x^2 + \frac{3}{2} = (x-a)(x-b)(x-c)$

$(ab + ac + bc)^2 - 2abc(a+b+c)$

$0^2 - 2 \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot 1 = 3$